3. EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

POUR APPLIQUER

3.1

«Nous considérerons d'abord les **quantités exponentielles**, ou les puissances dont l'*exposant est une quantité variable*; car il est clair que ces sortes de quantités ne peuvent être rapportées aux **fonctions algébriques**, puisque celles-ci n'admettent que des *exposants constants*».

«Introduction à l'analyse des infiniment petits», de Leonhard Euler, en 1748.

104. Écris les nombres suivants sans exposant négatif, ni fractionnaire et simplifie tes réponses, si cela est possible :

1) 3^{-2}

2) $3^{0,75}$

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1,25}$

4) $9^{-\frac{1}{2}} \,.\, 27^{\frac{2}{3}}$

5) $\dfrac{4^{-0,5} \,.\, 16^{\frac{1}{4}}}{32^{0,2}}$.

105. A l'aide de la calculatrice, donne une valeur approchée à moins de 10^{-3} près par défaut des nombres suivants :

1) $3^{\sqrt{2}}$ 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt[3]{2}}$ 3) $(0,1)^{\pi}$.

106. Calcule et interprète graphiquement :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^x$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0,35)^{x-1}$.

107. a) Dans un repère orthonormé du plan, dessine, point par point, les graphes cartésiens des fonctions

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = 3^x$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g(x) = (0,3)^x$.

b) Détermine leur domaine, leur ensemble-image, leurs racines, leurs éventuelles asymptotes verticales ou horizontales. Sont-elles paires ou impaires ?

c) Compare les deux graphiques obtenus et tires-en une conclusion.

d) Au départ du graphique adéquat, construis celui des fonctions

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to h(x) = (0,3)^{x+1}$,

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to i(x) = 2 \,.\, 3^x$,

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to j(x) = (0,09)^x$,

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to k(x) = |(0,3)^x - 2|$.

108. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $3^{2x} - 3^{x-2} = 0$

2) $(0,5)^{3x-1} = 1$

3) $4^{1-2x} - \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{x}{2}} = 0$

4) $2^{x^2} \leqslant 2$

5) $(0,25)^{1-3x} > 4^{2x+3}$

6) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x} < \dfrac{16}{9}$.

109. Trouve le domaine de définition des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, lorsque $f(x)$ égale :

1) $\dfrac{2x-1}{3^{2x-1} - 9}$

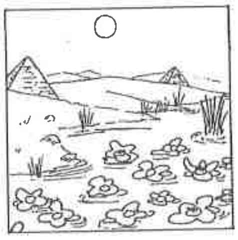
2) $\sqrt{5^{x-1} - 125}$

3) $\sqrt{(0,1)^x - 0,01}$.

110. Les nénuphars du Nil

Cette fleur de la famille des nymphéacées a la fâcheuse habitude de se reproduire très rapidement, à tel point que la navigation dans le détroit du Nil s'en trouve perturbée.

Ainsi, supposons qu'aujourd'hui une surface de 1 km^2 comporte *une* fleur. Les botanistes prétendent que de telles fleurs *doublent* chaque jour leur nombre.



a) Écris une fonction f qui modélise ce phénomène de croissance.

b) Combien de nénuphars y aura-t-il sur cette surface après 5 jours, 10 jours, 15 jours ?

c) Après combien de jours, le nombre de fleurs sera-t-il égal à 1 048 576 ?
(Procède par tâtonnements)

d) Si tel jour la moitié de la surface est recouverte de fleurs, combien de jours faudra-t-il pour qu'elles aient envahi toute la surface ?

e) Invente une fonction g qui décrit le même phénomène de croissance, si l'on t'annonce que la surface en question comportait 100 fleurs, au début de l'observation.

f) Dessine, dans un repère orthonormé du plan, les graphiques des fonctions f et g.

111. Valeur vénale d'une voiture.

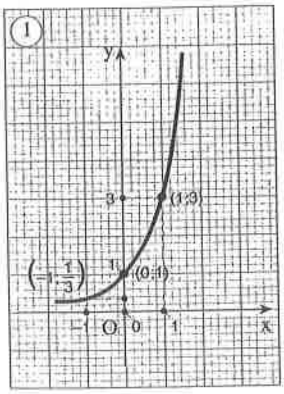
Certaines compagnies d'assurances considèrent qu'un véhicule automobile *perd* chaque année *20% de sa valeur*.

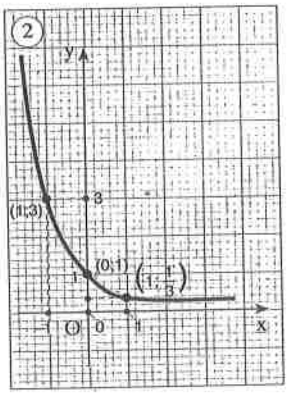
a) Monsieur Choumachère a acheté son véhicule pour 25 000 €. Établis pour lui une fonction V(t) qui exprime la valeur de l'engin, t années après son achat.

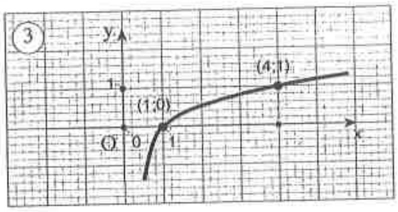
b) Dessine le graphique de cette fonction V sur un intervalle de temps allant de 1 à 5 ans.

c) Après combien d'années, son auto ne vaudra-t-elle plus que le cinquième du prix d'achat ? (Ce calcul devra s'effectuer en remplaçant t dans V(t) par des entiers successifs et en utilisant alors la calculatrice).

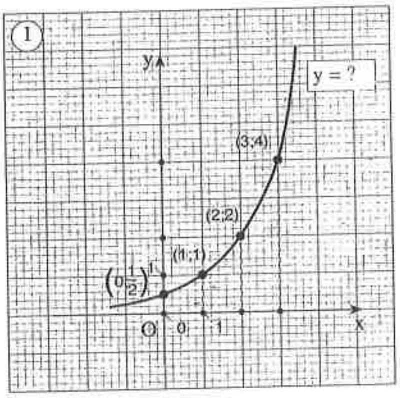
112. Observe les dessins suivants.
Représentent-ils des fonctions exponentielles ?
Si oui, donne une équation cartésienne de ces courbes.

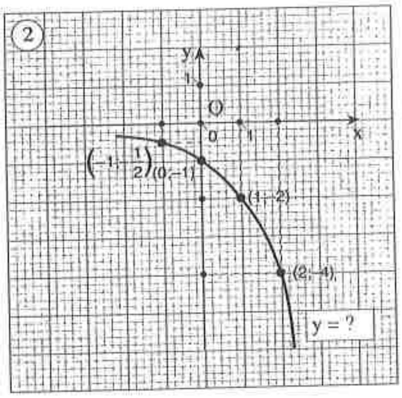


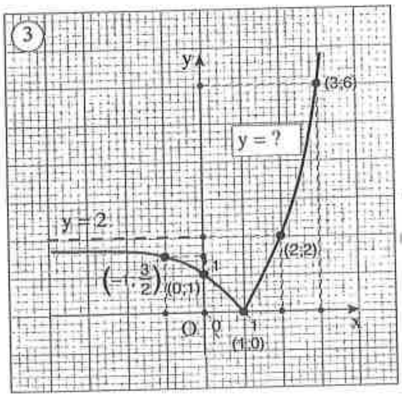




113. Donne une équation cartésienne des courbes suivantes, si l'on te dit qu'elle ont été obtenues par manipulations de la courbe d'équation $y = 2^x$.







3.2

«$a + \frac{e^n}{n} = x$. Donc Dieu existe !»

Cette boutade étrange fut lancée par le mathématicien suisse **Leonhard Euler** au philosophe français **Denis Diderot**, en 1773, dans les salons, à Saint Pétersbourg, de la **Grande Catherine**, impératrice de toutes les Russies.

114. Calcule à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-2} près :

1) e^{-3} 2) $\sqrt[3]{e^2}$ 3) $2e^{-2}\sqrt{e}$ 4) e^{π}.

115. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{4x} - 1 = 0$
2) $e \cdot e^x - \sqrt{e} = 0$
3) $e^{2x-1} - \frac{1}{e} > 0$
4) $e^{x^2} - e^4 \leqslant 0$
5) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
6) $\frac{(e^x)^2 - 1}{e^{x^2} - e} \geqslant 0$.

116. Quel est le domaine de définition des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, lorsque $f(x)$ égale

1) $2^{\sqrt{x}}$?
2) $e^{\frac{x-1}{x+2}}$?
3) $\frac{e^x}{e^{x+1} - 1}$?
4) $\sqrt{1 - e^{2x}}$?

117. Dérive et exprime les domaines de définition et de dérivabilité des fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ lorsque $f(x)$ égale :

1) xe^x
2) $2e^{x^2}$
3) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
4) $e^{\sin 2x}$
5) $\sin e^{2x}$
6) $\sqrt{1 - e^{2x}}$
7) $e^{\text{Arc}\sin x}$
8) $e^x \cdot \text{Arc } \tan x$.

118. Établis une équation cartésienne de la *tangente* à la courbe $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ au point d'abscisse 0.

119. Calcule :

1) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$
2) $\lim_{h \to 0} (1 + 2h)^{\frac{1}{h}}$
3) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x-1}$
4) $\lim_{x \to 0} (1 - 3x)^{-\frac{2}{x}}$.

120. a) Compare les graphiques de la fonction exponentielle népérienne et de la fonction

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$.

b) Tires-en une conclusion pour la manière dont les deux fonctions varient (on peut parler ici de *«vitesse de croissance»*).

c) Inspire-toi du b) pour caculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$.

d) Vérifie les réponses du c) par la règle de l'Hospital.

e) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{e^x}{x}$ présente-t-elle une *forme d'indétermination* pour x tendant vers $-\infty$?
Si non, quelle est la valeur de cette limite ?

121. Calcule :

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$ 2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{Arc } \sin x}$.

122. a) Au départ de la courbe d'équation $y = e^x$, construis la courbe d'équation $y = 1 - e^{x-2}$.

b) Calcule la coordonnée du (des) point(s) d'intersection de la deuxième courbe avec l'axe x.

c) Donne une équation de l'asymptote à la deuxième courbe.

123. Réalise une étude graphique complète des fonctions f telles que $f(x)$ égale

1) $\frac{e^x}{x}$,
2) $\frac{x}{e^x}$,
3) e^{-x^2} (exemple de courbe de Gauss).
4) $x^2 \cdot e^x$
5) $e^{2x} - 2e^x$.

124. LE SIDA ET L'EXPONENTIELLE

L'*Office mondial de la Santé* a publié des statistiques donnant l'évolution de la maladie du sida dans le monde. De 1984 à 1987, le nombre de malades était décrit par une **fonction exponentielle** $f(t) = e^{0,77t+6}$, où la variable t représente le nombre d'années depuis 1984.

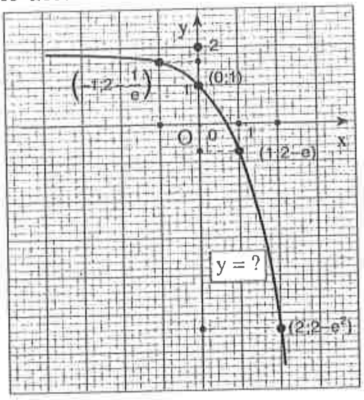
a) Calcule le nombre de personnes atteintes par la maladie en 1985, en 1986, en 1987. Que constates-tu du point de vue de la variation de cette fonction f ?

b) Représente graphiquement cette fonction.

c) Exprime *la vitesse de croissance* en nombre de malades par année.

d) Calcule par tâtonnements, le nombre d'années nécessaires pour que le nombre de malades dépasse 1 202 604.

125. Observe le dessin suivant.



a) De quelle fonction f la courbe dessinée est-elle le graphique ?

b) Quel est le domaine de définition et l'ensemble-image de f ?

c) Donne une valeur approchée de la racine de f.

d) Calcule :
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,
- $\lim_{x\to-1} f(x)$,
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

e) Donne une équation cartésienne de l'asymptote de ce graphique.

f) Trouve une équation cartésienne de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 1.

3.3

Dev.

126. Calcule à l'aide de la calculatrice :
$3\log 41{,}17 - \sqrt{\log 21{,}1}$.

127. On demande les valeurs de x pour que les expressions suivantes soient réelles :

1) $\log(1-2x)$

2) $\log_x(-x^2-x+2)$

3) $\log_{0,5}\dfrac{1-x}{1+x}$

4) $\dfrac{1}{\log_7 x}$.

128. Calcule le domaine de définition des fonctions f, lorsque f(x) égale

1) $\log(3-x)(2+x)$

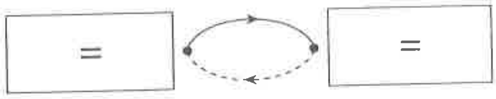
2) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-x^2)$

3) $\log_3\dfrac{3-2x}{x+1}$

4) $\log_2(4-5x)+\log_2(1-2x)$

5) $\sqrt{\log_{0,25}\dfrac{1-x}{1+x}}$.

129. a) Exprime à l'aide du schéma ci-dessous que $x \to \log x$ et $x \to 10^x$ sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre (Propriété $\boxed{5}$, page 49).



b) Utilisant cette propriété, complète (sans calculatrice) les cases vides :

1) $\log 100\,000 = 5$ car $10^{\square} = 100\,000$;

2) $\log \boxed{} = -3$ car $\boxed{}^{\square} = 1000$;

3) $10^{\square} = \sqrt{10} \;\Leftrightarrow\; \log\sqrt{10} = \boxed{}$.

130. Dessine, point par point, la courbe d'équation $y = 5^x$. Utilisant la propriété $\boxed{6}$, page 49), construis la courbe d'équation $y = \log_5 x$.

Dev.

131. a) Dessine, point par point, le graphe cartésien de la fonction $\log_3$.

b) Au départ de ce graphique, construis celui des fonctions :

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log_3(x+1)$;

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log_3 x + 1$;

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |2-\log_3(x-1)|$.

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log_3 x^2$.

c) Pour les fonctions $\log_3$, g, h, i et j détermine :

1) leur domaine de définition;

2) leur ensemble-image;

3) leur(s) asymptote(s) (en justifiant par le calcul des limites);

4) leur(s) racine(s).

5) l'expression analytique de leur réciproque et les graphes de ces dernières.

Dev

132. Résous les équations et les inéquations logarithmiques suivantes :

1) $\log_4(2x+1) - \log_4(3-x) = 0$

2) $\log_{0,4}(1-x) - 1 = 0$

3) $\log^2 x = 1$ $(\log^2 x = (\log x)^2)$

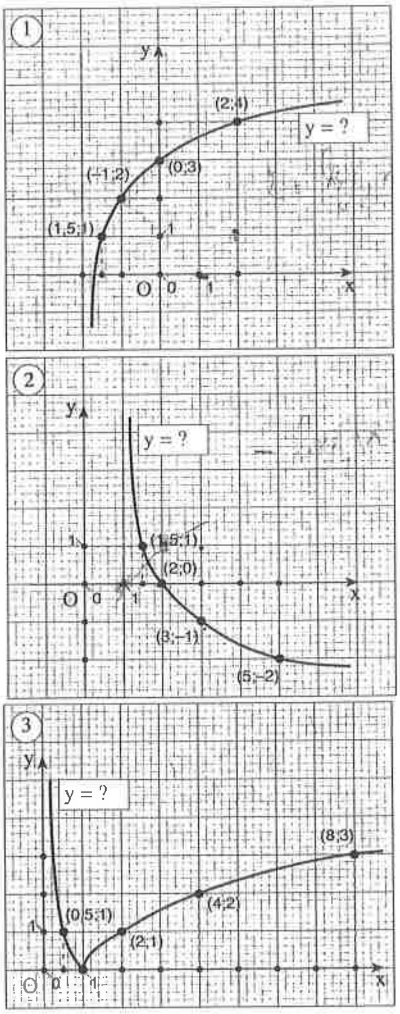
4) $\log(x^2-4) - \log(2x-x^2) \geqslant 0$

5) $\log_{0,5}(x^2-9) < 1$

6) $\log_2^2 x - 1 \leqslant 0$

7) $\log_2\dfrac{x^2-3x}{1-x} - 1 \geqslant 0$.

133. Voici le graphique de différentes fonctions. Écris une équation cartésienne de ces courbes, si l'on te dit qu'elles sont des transformées de la courbe d'équation $y = \log_2 x$:



3.4

134. a) Calcule la dérivée des fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lorsque $f(x)$ égale :

1) $3 \ln x - \dfrac{2}{x}$
2) $\ln 3x$
3) $\ln^3 x$
4) $\ln x^3$
5) $x \ln x$
6) $\dfrac{1}{\ln x}$
7) $\ln(\text{Arc} \sin x)$
8) $\text{Arc} \sin(\ln x)$
9) $\sqrt{\ln 2x}$.

b) Pour chacune des fonctions précédentes, trouve ses domaines de définition et de dérivabilité.

135. Simplifie les expressions :

$$F(x) = \ln e - \ln e^2 - \frac{1}{\ln e} + \ln \frac{1}{e}$$

$$G(x) = e^{3 \ln 2} + e^{-\ln 5} - (\ln e)^2.$$

136. Calcule sans faire usage de ta calculatrice :

1) $\ln e^3$
2) $\ln \dfrac{1}{e^4}$
3) $\ln \sqrt{e}$
4) $\left(\ln \dfrac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)^2$.

137. Utilise la propriété du lien entre de ln et exp (page 54) pour compléter sans l'aide de la calculatrice :

1) $\ln \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$ car $e^{\square} = \sqrt{e}$;

2) $\ln \square = -3$ car $\square^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{\square} \Leftrightarrow \square \dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = -\dfrac{2}{3}$.

138. a) Au départ du graphe cartésien de la fonction ln, trace celui des fonctions f telles que $f(x)$ égale :

1) $-\ln x$
2) $\ln(-x)$
3) $|\ln x|$
4) $\ln |x|$
5) $\ln x^2$.

b) Pour chacune de ces fonctions, cherche :

1) son domaine de définition;
2) son ensemble-image;
3) sa racine;
4) une équation cartésienne d'éventuelles asymptotes (la justification sera donnée par un calcul adéquat de limite).

139. Résous dans $\mathbb{R}$ (les solutions sont demandées à 10^{-2} près par défaut) :

1) $\ln x = 3$
2) $\ln(4 - x^2) = \ln 2x$
3) $\ln(2x - 1) > 0$
4) $\ln(1 - 2x) \geqslant 1$.
5) $\dfrac{\ln x + 1}{1 - \ln x} \geqslant 0$.

140. a) Calcule, à 10^{-2} près par défaut, le coefficient angulaire de la *tangente* à la courbe

1) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ au point d'abscisse e;

2) $y = \ln^2 x + \ln 2x$ au point d'abscisse 1.

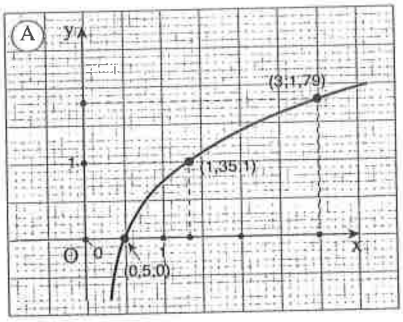
b) Dans les deux exercices, écris une équation cartésienne de la tangente en question.

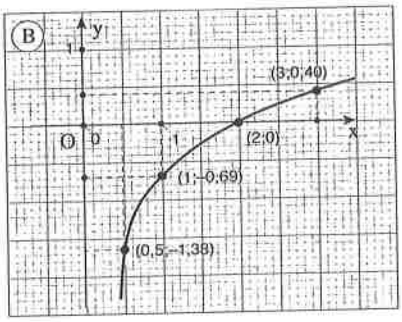
141. À chaque équation cartésienne suivante, associe une courbe dessinée :

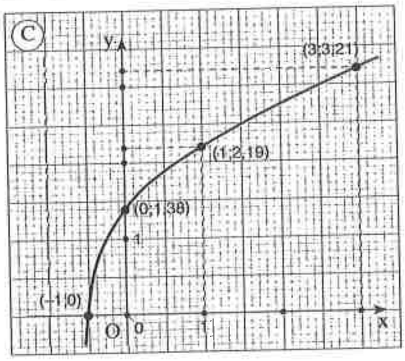
① $y = \ln \dfrac{x}{2}$ ④ $y = \ln x - \ln 2$

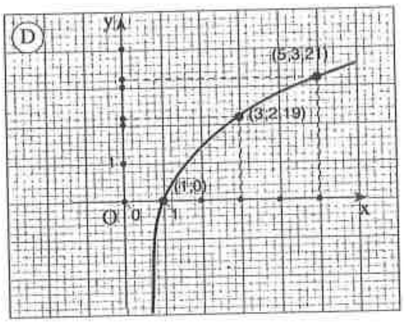
② $y = \ln 2x$ A ⑤ $y = 2\ln(x+2)$ C

③ $y = \ln x + \ln 2$ ⑥ $y = 2\ln x.$ D









142. a) Compare les graphiques de la fonction logarithme népérien et de la fonction

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x.$$

b) Tires-en une conclusion pour la manière dont les deux fonctions varient : compare leur *«vitesse de croissance»*.

c) Inspire-toi du b) pour calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x}$.

d) Vérifie tes réponses du c) par la règle de l'Hospital.

143. Calcule :

1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$ 3) $\lim_0 \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

2) $\lim_0 \dfrac{\ln x}{\cot x}$

144. Réalise une étude graphique complète des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, lorsque $f(x)$ égale

1) $\dfrac{\ln x}{x}$ 4) $\ln|x^2-1|$

2) $\dfrac{x}{\ln x}$ 5) $\dfrac{1}{\ln^2 x - 4}$

3) $\ln(x^2-1)$ 6) $x - \ln(x+1)$.

3.5

145. Utilisant l'équivalence entre des égalités qui lient les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ par la réciprocité, simplifie les expressions suivantes, sans utiliser la calculatrice :

1) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{125}}$ 4) $\log_{0,5} 32$

2) $\log \sqrt{1000}$ 5) $\log_{2\sqrt{3}} 144$

3) $\log_{\frac{5}{4}} 0,64$ 6) $\exp_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 8\right)$.

146. Sachant que $\log_2 x = u \quad (x > 0)$, exprime en fonction de u :

1) $\log_2 x^2$ 4) $(\log_2 x)^2$ ou $\log_2^2 x$

2) $\log_2 \sqrt{2x}$ 5) $\log_2 \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}}$.

3) $\log_2 \dfrac{x^3}{64}$

147. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\log_7(3x-1) = -2$
2) $\log_2(x^2-5x) = \log_2 6$
3) $\log_x 10 = 2$
4) $\dfrac{1}{e^{1-2x}} > 3$
5) $\log_{0,2}(2x-1) \leqslant 3$
6) $\log^2 x < 9.$

148. a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

b) Tires-en une résolution dans $\mathbb{R}$ des équations :

1) $3\log_2^2 x - 2\log_2 x - 5 = 0$
2) $3 \,.\, 2^{2x} - 2 \,.\, 2^x - 5 = 0.$

149. Dans plusieurs problèmes proposés plus haut, on a été amené à résoudre des *équations exponentielles* ... par tâtonnements.

Grâce à la mise en place du lien entre l'exponentielle et le logarithme, résous les équations suivantes :

1) $2^x = 1\,048\,576$
2) $100 \,.\, 2^x = 10\,000$ (les nénuphars du Nil, ex. 110)
3) $25\,000(0,8)^t = 5000$ (la valeur vénale d'une voiture, ex. 111)
4) $e^{0,77t+6} > 1\,202\,604$ (le sida et l'exponentielle, ex. 124)
5) $1000(1,03)^t = 2000$ (l'intérêt composé, page 40)

150. pH ET LOGARITHME.

Sachant que le pH d'une solution aqueuse est donnée par l'égalité $pH = -\log[H^+]$, calcule la concentration $[H^+]$ d'ions d'hydrogène en moles par litre d'une solution

1) de lait dont le pH est 6,6;
2) de pH strictement supérieur à 8.

151. Sachant que $\log 2 = 0,301\,03$, calcule :

1) $\log 8$
2) $\log 0,000\,2$
3) $\log\sqrt{2048}$
4) $\log 4000$
5) $\log^2 5$
6) $\log\sqrt{\dfrac{125}{2}}$.

152. Si l'on te dit que $\left|\begin{array}{ll} \ln a = u & (a \in \mathbb{R}_0^+), \\ \ln b = v & (b \in \mathbb{R}_0^+), \\ \ln c = w & (c \in \mathbb{R}_0^+), \end{array}\right.$

exprime en fonction de u, v et w :

1) $\ln ab^2c$
2) $\ln\dfrac{ab}{c^2}$
3) $\ln\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2$
4) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}}$
5) $\ln\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{c}$
6) $\left(\ln\dfrac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}\right)^2$.

153. Simplifie l'expression $F(x) = e^{\ln x} - e^{3\ln 2} - \ln e^x$.

Dis pour quelles valeurs de x, F(x) est un réel.

154. Construis les graphiques des fonctions

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to e^{\ln x}$ et

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \ln e^x$.

Sont-ils égaux ? Pourquoi ?

155. Résous dans $\mathbb{R}$ en utilisant les propriétés opératoires des logarithmes :

1) $\ln x + \ln 2 = 1$
2) $2\log_5(x+3) - 3\log_5 2 = 0$
3) $\log_x(x+1) - \log_x 0,2 = 2$
4) $\ln\dfrac{x-1}{x+1} + \ln x < 0$
5) $2\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} 3 < \dfrac{1}{16}$
6) $\ln x - \ln 2 \leqslant \ln(1-3x)$.

156. Calcule : $2\log_3 4 - 3\log_{0,2}\sqrt{2}$.

157. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\log_x 4 = \log_4 x$
2) $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) - \log_{\frac{1}{3}} x < \log_3 x$
3) $\log_2(\log_x 81) = 2$
4) $\log_2(x-1) \,.\, \log_4 3 = 0$
5) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1-x^2}{x} < \log_3 x$
6) $x^{\log_3 x} = x^{\log_5 2x}$
7) $\log_2(2^x - 1) + x = \log_4 144$
8) $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) - \log_{\frac{1}{3}} x < \log_3 x$.

158. Calcule :

1) $(3^{2x+1})'$
2) $(\log_{0,2}\sin x)'$
3) $(\log_2^4 x)'$
4) $(10^x \,.\, \log x)'$
5) $(\text{Arc tan } 5^x)'$
6) $(5^{\text{Arc tan } x})'$.

159. Précise les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et dérive ces fonctions :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, lorsque f(x) égale

1) $\log_{0,2}(\tan 3x)$
2) $\log_{0,2}(\text{Arc sin } 3x)$
3) $\sqrt{\log_2(4-x^2)}$
4) $\sqrt{\log_{0,5}(4x-x^2)}$.

160. Établis une équation de la *tangente* au graphe cartésien de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{\log_3 x}$ au point d'abscisse 3.

161. Calcule :

1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log_2 x}{\log_{0,5} x}$ 2) $\lim_{x\to-\infty} 3^x \,.\, \log(3-x)$.

162. Représente graphiquement les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, lorsque $f(x)$ égale

1) $x^2 \log_{\frac{1}{2}} x$ 2) $\dfrac{2^x}{x}$.

163. **Vrai** ou **faux** ? Si l'énoncé est vrai, justifie-le ! S'il est faux, corrige-le !

1) Quel que soit le réel x, $a^{\log_a x} = x$.

2) $\left(\log_3\left(3^{2x}\right)\right)' = 2$, quel que soit le réel x.

3) Les courbes d'équation $y = \log_2 x$ et $\log_{0,5} x$ sont symétriques par rapport à l'axe x d'un repère orthonormé du plan.

4) $\left(\sin\left(\log_3 x\right)\right)' = \left(\log_3\left(\sin x\right)\right)'$.

5) Les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^x$ sont symétriques par rapport à l'origine O d'un repère orthonormé du plan.

6) Pour tout réel a strictement positif et pour tout réel b strictement positif différent de 1, on a $\dfrac{\log a}{\log b} = \log(a-b)$.

7) Les courbes d'équation $y = 4^x$ et $y = (0,25)^x$ sont symétriques par rapport à l'axe y d'un repère orthonormé du plan.

8) Quels que soient les réels x et y strictement positifs, on a $\ln(x+y) = \ln x \,.\, \ln y$.

9) Si k et x sont des réels de même signe, alors $(\ln kx)' = (\ln x)'$.

10) Pour tout réel a et b, $\exp \dfrac{a}{b} = \exp a - \exp b$.

11) Si $a > 0$, alors $\ln a$ est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $y = a^x$ au point d'abscisse 0.

12) Si x et a sont des réels strictement positifs : $\log x \,.\, \ln a = \ln x \,.\, \log a$.

13) $a^b = e^{b \ln a}$, pour tout a réel strictement positif.

164. Quelle est la bonne réponse ? Justifie !

	a	b	c
1) $\log 10\sqrt{x}$	$5 \log x$	$1 + \frac{1}{2}\log x$	$10 \log x$
2) $\log_5 7$	$\frac{\ln 7}{\ln 5}$	$\frac{\ln 5}{\ln 7}$	$\frac{\log 5}{\log 7}$
3) $(\ln 4)^2$	$2 \ln 4$	$\ln 16$	$\ln 4 \,.\, \ln 4$
4) $\left(e^{\pi}\right)'$	e^{π}	0	$\pi e^{\pi-1}$
5) La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \exp \frac{1}{2x-1}$ est définie sur	$\left]\frac{1}{2}, \to\right.$	$\left.\leftarrow, \frac{1}{2}\right[$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$
6) $\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right]$	0	$+\infty$	-2
7) La solution de l'équation $\log x = -4$	est $0,0001$	est $\frac{1}{1000}$	n'existe pas
8) La solution de l'équation $10^x + 3 = 0$	est $\ln 3$	est $\log 3$	n'existe pas
9) L'ensemble des solutions de l'inéquation $(0,3)^x \leqslant 1$ est	$\{1\}$	$[1, \to$	$\leftarrow, 1]$

POUR S'AUTOCONTRÔLER

3.1

165. Calcule sans utiliser ta calculatrice : $\dfrac{3^{-1}\,.\,9^{\frac{3}{2}}}{(0,81)^{\frac{1}{2}}}$.

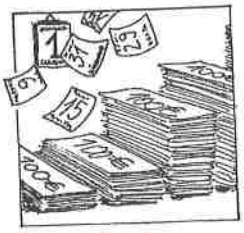
166. a) Au départ d'une courbe bien choisie, construis le graphique de la fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |2^{x-1} - 2|.$$
Justifie chaque étape de la construction.

b) Détermine son domaine de définition, son ensemble-image, ses éventuelles racines, son asymptote horizontale. Est-elle paire ou impaire ?

167. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $9^{x+1} = 3^{1-2x}$ 2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \leqslant 5^{2x-1}$.

168. **DES INTÉRÊTS COMPOSÉS.**



Un capital de 1000 € est placé à un taux d'intérêt de 5% et est capitalisé annuellement.

a) Calcule le capital après 5 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans, 25 ans, 30 ans.

b) Exprime analytiquement la fonction qui décrit ce phénomène. Nomme-la et caractérise sa variation.

c) Dessine, dans un repère bien choisi du plan, la courbe représentative de cette fonction.

d) Après combien d'années, le capital aura-t-il doublé ?

e) Après combien d'années, le capital sera-t-il devenu 10000 € ?

3.2

169. Résous dans $\mathbb{R}$: 1) $e^{3x+1} = \dfrac{1}{e^2}$ 2) $\sqrt{e^{x^2} - e^2} \geqslant 0$.

170. Quel est le domaine de définition de

1) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{x+1} - \sqrt{e}}$?   2) $f(x) = \sqrt{e^{3x} - 1}$?

171. Calcule :

1) $\left(\dfrac{x}{e^x}\right)'$ 3) $\left(\text{Arc}\cos(e^x)\right)'$

2) $\left(e^{\tan x}\right)'$ 4) $\lim_{x\to 0}\left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)^x$.

3.3

172. Calcule à l'aide de la calculatrice :
$$\frac{\log 0,25 - \log^2 12}{\sqrt{\log 4,3}}.$$

173. Calcule sans l'aide de la calculatrice :

1) $\log_2 \sqrt{128}$ 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81$.

174. Quel est le domaine de définition des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

1) $f(x) = \log(4x^2 - 8x)$?

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(4x + 8) - \log_{\frac{1}{3}}(2 - x)$?

175. a) Dessine, point par point, le graphique de la fonction $\log_{\frac{1}{3}}$.

b) Dessine ensuite de manière justifiée le graphique de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log_{\frac{1}{3}}(x + 2) - 1$.

c) Détermine pour f :

1) son domaine de définition;

2) son ensemble-image;

3) son asymptote verticale (justifie par un calcul de limite);

4) sa racine.

176. Quel est le domaine de définition des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que

1) $f(x) = \dfrac{x}{\log(x-2) - 1}$?

2) $f(x) = \sqrt{\log_{0,2} x}$?

3.4

177. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -\ln(x - 2)$.

a) Calcule, à 10^{-2} près par défaut, les images de -1 ; 2 ; 3 ; 4 ; $4,5$; 5.

b) Au départ du graphique d'une fonction bien connue, construis celui de f ainsi que son asymptote.

c) Dérive la fonction f.

d) Étudie le signe de f'. Les conséquences de cette étude sont-elles conformes au dessin réalisé en b) ?

e) Calcule et étudie le signe de f''. Réponds à la même question qu'en d).

f) Calcule (algébriquement et graphiquement) la racine de f.

178. Effectue l'étude graphique complète de
$$f(x) = x \ln x.$$

179. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $2e^{2x} - 7e^{x} + 5 = 0$
2) $2\ln^2 x - 7\ln x + 5 \leqslant 0.$

3.5

180. Simplifie sans faire usage de la calculatrice :

1) $e^{-\ln 5}$ 2) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}.$

181. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\log_2 x = 4;$ 2) $\log_{\frac{1}{5}}(1-x) \geqslant -1$
3) $10^{2x-1} = 2$ 5) $\log_x 4 = \log_4 x.$
4) $e^{x^2-4} \geqslant 1$

182. Sachant que $\ln 2 \approx 0{,}6931$ et $\ln 3 \approx 1{,}0986$, calcule au millième près par défaut et sans utiliser la calculatrice :

1) $\ln 6$ 2) $\ln \dfrac{8}{27}$ 3) $\ln \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}.$

183. Résous dans $\mathbb{R}$: $2\ln(1-x) - \ln(x+3) = 3\ln 2.$

184. Dérive la fonction f telle que $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x-1}.$

185. Écris une équation cartésienne de la *tangente* à la courbe $y = \log_2^2 x$ au point d'abscisse 8.

SOLUTIONS DES EXERCICES POUR S'AUTOCONTRÔLER

165. $\dfrac{3^{-1} \cdot (3^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\dfrac{81}{100}}} = \dfrac{3^{-1} \cdot 3^3}{\dfrac{3^2}{10}} = 10.$

166. a) $2^x \longrightarrow 2^{x-1} \longrightarrow 2^{x-1} - 2 \longrightarrow |2^{x-1} - 2|.$

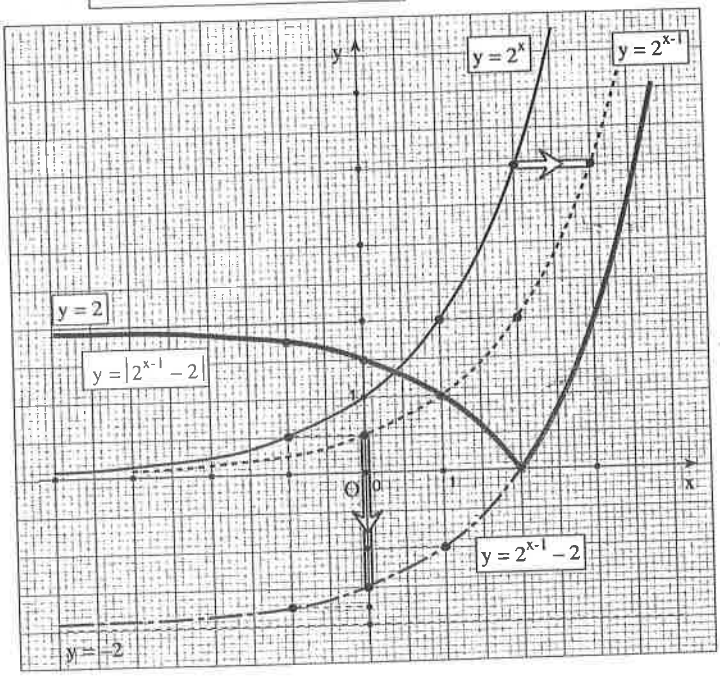
- translation horizontale de 1 unité vers la droite
- translation verticale de 2 unités vers le bas
- • identité pour les points d'ordonnée positive,
  • symétrie d'axe x pour les points d'ordonnée négative.

b) • dom g = $\mathbb{R}$; im g = $\mathbb{R}^+$;

• la racine de g est 2;

• l'asymptote horizontale à gauche a pour équation y = 2
$\left(\lim_{x\to-\infty} |2^{x-1} - 2| = 2\right).$

• g n'est ni paire, ni impaire.



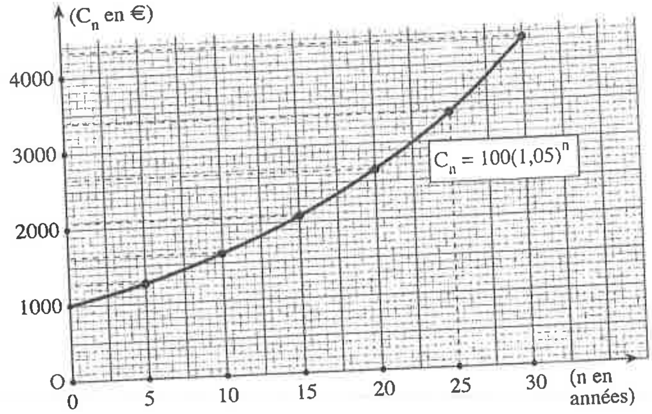
167. 1) $(3^2)^{x+1} = 3^{1-2x} \Leftrightarrow 3^{2x+2} = 3^{1-2x} \Leftrightarrow 2x+2 = 1-2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$ $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x+1} \Leftrightarrow x \geqslant -2x+1 \Leftrightarrow 3x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{3}.$ $S = \left[\frac{1}{3}, \rightarrow\right.$

168. a)

Après	1000 € deviennent		
5 ans	$1000(1+0,05)^5$	ou	1276,28 €
10 ans	$1000(1,05)^{10}$	ou	1628,89 €
15 ans	$1000(1,05)^{15}$	ou	2078,93 €
20 ans	$1000(1,05)^{20}$	ou	2653,29 €
25 ans	$1000(1,05)^{25}$	ou	3386,35 €
30 ans	$1000(1,05)^{30}$	ou	4321,94 €

c)



b) $C_n = 1000(1,05)^n$. Multiple d'une fonction exponentielle de base 1,05.
Croissance exponentielle (lente au début, puis très rapide).

d) $1000(1,05)^n = 2000 \Leftrightarrow (1,05)^n = 2$
Le capital double après 15 ans.

n	$(1,05)^n$
13	1,89
14	1,98
15	2,08

e) $1000(1,05)^n = 10\,000 \Leftrightarrow (1,05)^n = 10$
Le capital décuple après 48 ans.

n	$(1,05)^n$
46	9,43
47	9,91
48	10,40

169. 1) $e^{3x+1} = e^{-2} \Leftrightarrow 3x+1 = -2 \Leftrightarrow x = -1.$ $\boxed{S = \{-1\}}$

2) $e^{\frac{x^2}{2}} \geqslant e^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \geqslant 2 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2.$ $\boxed{S = \leftarrow, -2] \cup [2, \rightarrow}$
(exp. est strictement croissante)

170. 1) $\underline{CE}$: $e^{x+1} - e^{\frac{1}{2}} \neq 0 \Leftrightarrow e^{x+1} \neq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x+1 \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}.$ dom f $= \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}.$

2) $\underline{CE}$: $e^{3x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{3x} \geqslant e^0 \Leftrightarrow 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$ dom f $= [0; \rightarrow$.

171. 1) $\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$

2) $\left(e^{\tan x}\right)' = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}.$

3) $\left(\text{Arc}\cos(e^x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot e^x = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

4) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x\cdot\frac{1}{3}} = \left(\lim_{3x\to 0}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$

172. $-2,21972\ldots$

173. 1) $\log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$ 2) $\log_{\frac{1}{3}} 3^4 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4.$

174. 1) $\underline{CE}$: $4x^2 - 8x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 2.$ dom f $= \leftarrow, 0[\cup]2, \rightarrow$.

2) $\underline{CE}$: $4x + 8 > 0 \Leftrightarrow x > -2$
et $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$ dom f $=]-2; 2[.$

175. a) et b)

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$

$\downarrow$ translation horizontale vers la gauche de 2 unités

$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

$\downarrow$ translation verticale vers le bas de 1 unité

$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - 1$

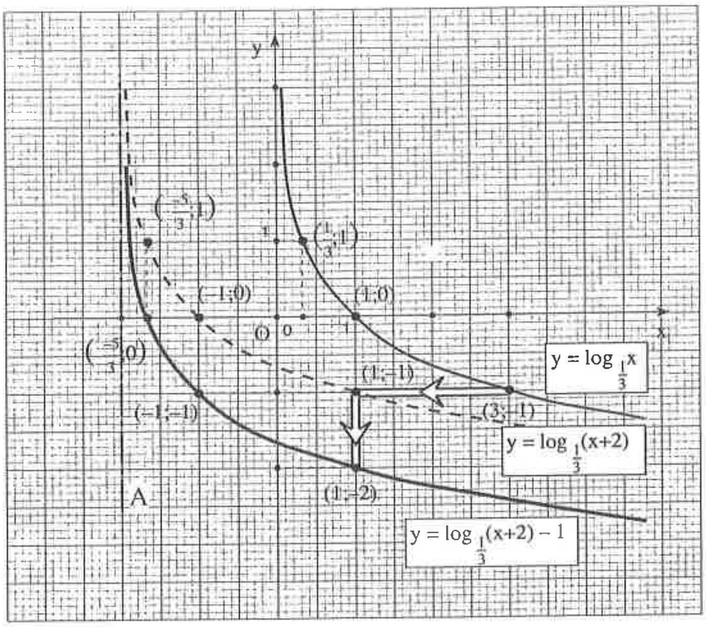
c) 1) dom f $=]-2; \rightarrow$

2) im f $= \mathbb{R}$

3) A $\equiv x = -2$

car $\lim_{x \to -2} \left[\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - 1\right] = +\infty$

4) $x = -\dfrac{5}{3}$.



176. 1) <u>CE</u> :
- $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $\log(x-2) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \log(x-2) \neq 1 = \log 10 \Leftrightarrow x - 2 \neq 10 \Leftrightarrow x \neq 12$

dom f $=]2; 12[\cup]12, \rightarrow$.

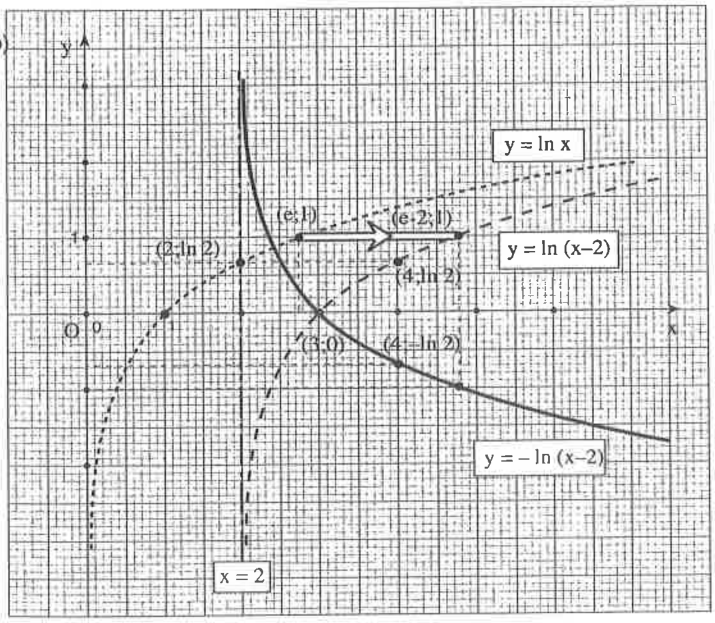
2) <u>CE</u> :
- $x > 0$
- $\log_{0,2} x \geqslant 0 \Leftrightarrow \log_{0,2} \geqslant \log_{0,2} 1 \Leftrightarrow x \leqslant 1$ ($\log_{0,2}$ est strictement décroissante)

dom f $=]0; 1]$.

177. a)

x	−1	2	3	4	4,5	5
f(x)			0	−0,69	−0,91	−1,09

b)



c) $f'(x) = \dfrac{-1}{x-2}$

d)

x	2	
f'(x)		−
f(x)	$+\infty$	↘

La stricte décroissance est confirmée dans le dessin.

e) $f''(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

x	2	
f''(x)		+
G_f		$\cup$

La concavité de la courbe tournée vers le haut est confirmée dans le dessin.

f) $-\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln 1$
$\Leftrightarrow x - 2 = 1$
$\Leftrightarrow x = 3.$

La courbe coupe l'axe x au point (3; 0).

178. 1. ***Étude de f***

a) Dom f = $\mathbb{R}_0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x \underset{0(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{\boxed{\text{règle de l'Hospital}}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

D'où, G_f n'admet aucune asymptote verticale.

b) f n'est ni paire, ni impaire.

c) $\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$. D'où, G_f n'admet aucune asymptote horizontale.

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$. D'où, G_f n'admet aucune asymptote oblique.

e) $x\ln x = 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$. D'où, $G_f \cap x = \{(1;0)\}$.

2. ***Étude de f'***

a) $(x\ln x)' = \ln x + 1$.

b) $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ ou 0,37.

c)

x	0		e^{-1}	
$f'(x)$	$-\infty$	−	0	+
f(x)	0	↘	m	↗

$\lim_{x\to 0^+}(\ln x + 1) = -\infty$

3. ***Étude de f''***

a) $(x\ln x)' = \frac{1}{x}$

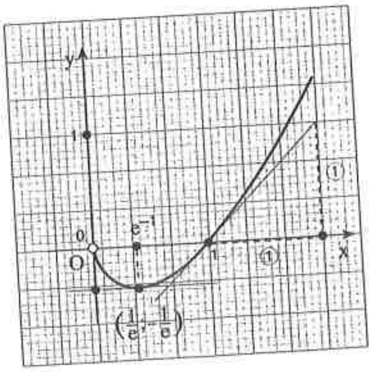
b) f'' n'admet aucune racine

c) Pour tout réel strictement positif, $f''(x) > 0$

x	0	
$f''(x)$		+
f(x)		∪

4. ***Tableau récapitulatif***

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
f'(x)	$-\infty$	−	0	+	$\boxed{1}$		+
f''(x)		+	+	+	+		+
f(x)	0	↘	$-e^{-1}$	↗	0	↗	$+\infty$
G_f		∪	∪	∪	∪	∪	
	(0;0) est un «trou» dans G_f		(e^{-1};$-e^{-1}$) est un point minimum à tangente horizontale				



179. 1) Soit $e^x = y$.

$$2y^2 - 7y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{5}{2}$$

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$e^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{5}{2} = 0,916\ldots \quad S = \left\{0\ ;\ \ln\frac{5}{2}\right\}.$$

2) Soit $\ln x = y$.

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\ln x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{2}} = 12,182\ldots \quad S = \left\{e\ ;\ e^{\frac{5}{2}}\right\}.$$

180. 1) $e^{\ln 5^{-1}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$. 2) $\log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$.

181. 1) <u>CE</u> : $x > 0$. $x = 2^4$; $S = \{16\}$.

2) <u>CE</u> : $x < 1$. Pour autant que la condition d'existence soit réalisée, on a

$$\log_{\frac{1}{5}}(1-x) \geqslant \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow 1 - x \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x \geqslant -4.$$

($\log_{\frac{1}{5}}$ est strictement décroissante)

$S = [-4; 1[$.

3) $2x - 1 = \log 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 + \log 2}{2}$. $S = \left\{\dfrac{1+\log 2}{2}\right\}$.

4) $e^{x^2-4} \leqslant e^0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leqslant 0$. $S =]\leftarrow, -2] \cup [2, \rightarrow[$.

(exp est strictement croissante)

5) <u>CE</u> : $x > 0$ et $x \neq 1$.

$$\frac{1}{\log_4 x} = \log_4 x \Leftrightarrow \left(\log_4 x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \log_4 x = 1 \text{ ou } \log_4 x = -1 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{4}. \quad S = \left\{\frac{1}{4}\ ;\ 4\right\}.$$

182. 1) $\ln 6 = \ln 2 . 3 = \ln 2 + \ln 3 \approx 1,791$.

2) $\ln\dfrac{8}{27} = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = 3\ln\dfrac{2}{3} = 3(\ln 2 - \ln 3) \approx -1,216$.

3) $\dfrac{1}{3}(\ln 2 - \ln 3) \approx -0,135$.

183. <u>CE</u> : $-3 < x < 1$. Pour autant que la condition d'existence soit réalisée, on a

$$\ln\frac{(1-x)^2}{x+3} = \ln 8 \Leftrightarrow \frac{(1-x)^2}{x+3} = 8 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 23 = 0 \Leftrightarrow x = 5 - 4\sqrt{3} \text{ ou } x = 5 + 4\sqrt{3}.$$

Dès lors, $S = \{5 - 4\sqrt{3}\}$.

184. $4\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4x-1}\ln\dfrac{2}{3}$.

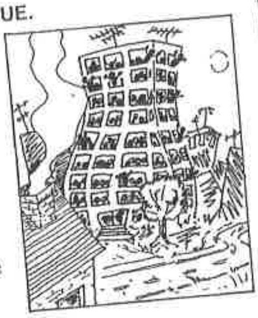
185. $f(8) = \log_2^2 2^3 = 3^2 = 9$;

$f'(x) = \dfrac{2\log_2 x}{x\ln 2}$; $f'(8) = \dfrac{3}{4\ln 2}$; $t \equiv y = \dfrac{3x}{4\ln 2} + \dfrac{9\ln 2 - 6}{\ln 2}$.

POUR CHERCHER

3.1

186. UN PROBLÈME DÉMOGRAPHIQUE.



La population de Clostadt double tous les dix ans. En 1990, elle était de 100 000 habitants.

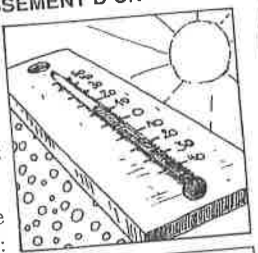
a) Exprime la population de cette localité en fonction de l'année.

b) Quel était le nombre d'habitants en 1985 ?

Quel sera ce nombre en 2015 ?

c) Puisque la population double après dix ans, crois-tu qu'après vingt ans elle aura quadruplé ? Pourquoi ?

187. LOI DE NEWTON DU REFROIDISSEMENT D'UN OBJET



Le savant anglais Isaac Newton (1642-1727) s'est illustré (une fois de plus !) dans un domaine physique qui étudie le *refroidissement d'un corps*.

Il a proposé la loi suivante appliquée à un cas concret :

> la **température** h(t) d'un objet *après t heures* de refroidissement est exprimée par la fonction
> $$h(t) = 27 \,.\, 2^{-2t} + 21.$$

(la température ambiante est supposée être de 21°).

a) Calcule la température de l'objet 1h, 1h30, 2h après le début de l'observation.

b) Après combien de temps la température aura-t-elle atteint 22° ? (on trouvera une valeur approchée en prenant quelques valeurs adéquates de t).

3.2

188. Réalise une étude complète des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, telles que f(x) égale :

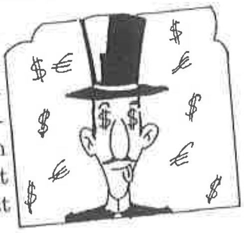
1) $e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$

2) $\dfrac{1}{e^{x^2-3x}}$

3) $e^{\sin x}$

4) $e^{\operatorname{Arc\,tan} x}$.

189. CROISSANCE EXPONENTIELLE INSTANTANÉE.



Pour t'aider à bien comprendre le *«petit bout d'histoire»* (p.254), voici un exercice concernant une approche du **nombre e**. Dans un pays où les banquiers sont véreux, le taux d'intérêt est de 100% *par an*.

Ainsi, toute somme prêtée nécessite, un an après, le remboursement du *double* de cette somme.

Imaginons que tu reçoives un prêt de 1000 € dans ces conditions-là !

a) Écris la fonction S(t) qui modélise la somme à rembourser après t années.

b) Non contents d'empocher annuellement un intérêt usuraire, ces Messieurs Picsous décident de capitaliser les intérêts *tous les trois mois*. Que vaut alors le taux mensuel ?

Que devient le capital de 1000 € après un mois, deux mois, un an ? (Une démarche analogue a déjà été réalisée à la page 40)

c) De plus en plus fort ! Ils décident de calculer de *plus en plus fréquemment* l'intérêt et de le recapitaliser aussitôt. Les banquiers y trouvent-ils un avantage ?

Difficile à prévoir, aussi complète le tableau proposé en fin d'exercice pour t'aider à répondre à la question posée.

d) Observe le nombre de la dernière case de droite du tableau.

Reconnais-tu une valeur approchée d'un nombre connu de toi ? Lequel ?

e) Imaginons que n grandisse au-delà de toute limite, vers quel nombre va tendre $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$?

Nous te renvoyons au *«petit bout d'histoire»* qui suit (voir p. 254) pour apprendre l'importance que ce nombre a joué et joue encore dans de nombreux domaines des sciences.

Période d'intérêt	n	Capitalisation (en euros) après 1 an	Montant (en euros) à la fin de la première année
trimestre	4	$1000(1+\frac{1}{4})^4 =$	$2,44141$
mois	12		
semaine	52		
jour	365		
heure			
minute			
seconde			

3.3

190. Soit les fonctions

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log(x-1) + \log(x+4)$

$i\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log(x-1)(x+4)$

$j\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log(x-1) - \log(x+4)$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log \dfrac{x-1}{x+4}$

$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log|x-1| - \log|x+4|$

$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log \left|\dfrac{x-1}{x+4}\right|.$

a) Quel est leur domaine de définition respectif ?

b) Les fonctions h et i sont-elles égales ? Et les fonctions j et k ? Et les fonctions ℓ et m ?

c) A quelle condition peut-on écrire :

1) $\log(x-1)(x+4) = \log(x-1) + \log(x+4)$?

2) $\log \dfrac{x-1}{x+4} = \log(x-1) - \log(x+4)$?

191. a) Démontre que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log_2 \frac{x-1}{x+1}$$

est une fonction impaire.

b) Démontre que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

est une fonction impaire.

c) Quelle conclusion graphique en tires-tu ?

3.4

192. Réalise une étude complète des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ telles que $f(x)$ égale :

1) $\ln \cos x$

2) $\ln(\operatorname{Arc}\ \sin x)$

3) $\operatorname{Arc}\ \sin(\ln x)$.

193. Résous dans $\mathbb{R}$:

1) $\ln x^2 + (\ln x - 4)\ln^2 x = 0$;

2) $\ln x^2 + (\ln x - 4)\ln^2 x \geqslant 0$.

194. LE LOGARITHME EN ACOUSTIQUE

Le niveau sonore d'un bruit d'intensité I est donné en décibels (db) par la formule $\alpha = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$, où I_0 est l'intensité du son le plus faible qui soit perceptible par l'oreille humaine.

a) Quel est le niveau sonore d'une conversation dont l'intensité est $10\,000\ I_0$?

b) Un concert de rock a atteint un niveau sonore de 120 db, ... un tel niveau pouvant entraîner une surdité partielle définitive !

Calcule dans ce cas $\dfrac{I}{I_0}$.

3.5

195. Soit
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to e^x$,
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \ln x$,
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 - 1$.

a) Définis les fonctions suivantes et donne leur domaine de définition, de continuité et de dérivabilité :

1) $f \circ g \circ h$

2) $f^{-1} \circ g \circ h$.

b) Dérive ces composées.