ATHENEE ROYAL D'IXELLES
Classe 6èmeGénérale (6h)
Travaux dirigés de Mathématiques

Exercice1

1) $\int (1-x)\sqrt[3]{x^2}dx$

2) $\int \frac{(3x-2)^2}{x^3}\ dx$

3) $\int (\frac{2}{3x^3} + 2\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{x}\ )\ dx$

4) $\int \frac{2\ dx}{\cos^2 4x}$

5) $\int (2x - \frac{1}{x})\ dx$

6) $\int 3^x dx$

7) $\int \frac{5}{3\sqrt[3]{x^5}}dx$

8) $\int \frac{(3x^4+5x^3-2x+1)}{x^2}\ dx$

9) $\int 3(x-1)(x^2+3x-2)\ dx$

10) $\int (3\cos x + e^x - \frac{4}{\cos^2 x})\ dx$

Exercice2

1) $\int \cos x \sin^2 x\ dx$

2) $\int \frac{(x+3)\ dx}{\sqrt[3]{x^2+6x}}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

4) $\int \frac{2\ dx}{\cos^2 4x}$

5) $\int \frac{1\ dx}{x\ln x}$

6) $\int \frac{(x+1)\ dx}{\cos^2(x^2+2x)}$

7) $\int \frac{1\ dx}{x\ln x}$

8) $\int (x-1)\sin(4x^2-8x)\ dx$

9) $\int x(x^2+3)^{15}dx$

10) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-4x^4}}$

11) $\int \frac{4\ dx}{x^2-4x+4}$

12) $\int \tan x\ dx$

13) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

14) $\int \frac{(x+5\ )\ dx}{x+3}$

15) $\int \frac{2e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$

16) $\int 2^{\sin x}\cos x\ dx$

17) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x}dx$

18) $\int \frac{(x+5\ )\ dx}{x+3}$.

238. Détermine l'ensemble I des réels sur lequel les fonctions f suivantes admettent des primitives.

a) Trouve toutes les primitives de f(x) sur I.

Parmi celles-ci, détermine celle qui répond à la condition indiquée :

f(x) égale	La primitive demandée prend la valeur
1) $2x$	4, pour $x = 1$;
2) $x^2 - 4x$	-1, pour $x = -2$;
3) $\frac{1}{2x}$	-2, pour $x = e$;
4) $\frac{-3}{1+x^2}$	$\frac{\pi}{4}$, pour $x = -1$.

b) Parmi les primitives d'une fonction donnée, combien prennent une valeur donnée en un réel donné ? Justifie !

Sauf mention contraire dans les exercices 239 à 244, les primitives sont à calculer sur $\mathbb{R}$.

239. Calcule les primitives suivantes en observant que chaque fonction à intégrer est la dérivée de la composée de deux fonctions.

1) $\int 3x^2(x^3-1)^8 \, dx$

2) $\int \frac{3u^2}{(u^3-1)^4} \, du$ (sur $]1; \rightarrow[$)

3) $\int 10x \sin 5x^2 \, dx$

4) $\int \frac{2x}{\cos^2(x^2-1)} \, dx$ (sur $]0; 2[$)

5) $\int 3e^{3t-2} \, dt$

6) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+8} \, dx$

7) $\int \frac{\sqrt{\ln v}}{v} \, dv$ (sur $]1; \rightarrow[$)

8) $\int \frac{\operatorname{Arc\,sin} t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$ (sur $]-1; 1[$).

240. Calcule les intégrales indéfinies suivantes après avoir réalisé un *ajustement du coefficient numérique* de la fonction à intégrer.

1) $\int \frac{u}{(3u^2+5)^2} \, du$

2) $\int t^3\sqrt{t^4+2} \, dt$

3) $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}} \, dx$ (sur $]-6; 0[$)

4) $\int \frac{2}{\cos^2 4x} \, dx$ (sur $\left]-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right[$)

5) $\int \cos 3x \, dx$

6) $\int e^{2u-1} \, du$

7) $\int \frac{1}{1-x} \, dx$ (sur $\leftarrow; 1[$)

8) $\int \left(\frac{1-2e^x}{e^x} - 2\right) dx$

9) $\int \frac{x-1}{4x^2-8x+7} \, dx$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ (sur $\left]-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right[$).

241. On te demande de calculer les primitives suivantes sachant qu'il te faudra d'abord transformer algébriquement la fonction à intégrer :

1) $\int (3\varphi+4)^2 \, d\varphi$

2) $\int (x-1)(2-x) \, dx$

3) $\int (1-t)\sqrt{t} \, dt$

4) $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} \, dx$ (sur $\mathbb{R}_0^+$)

5) $\int \frac{v+2}{v+1} \, dv$ (sur $]-1; \rightarrow)$)

6) $\int \left(e^x - e^{-x}\right)^2 dx$

7) $\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \, dx$ (sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$)

8) $\int \frac{1+\ln^3 t}{2t} \, dt$ (sur $\mathbb{R}_0^+$)

9) $\int \frac{(1+\alpha)^2}{\sqrt{\alpha}} \, d\alpha$ (sur $\mathbb{R}_0^+$)

10) $\int \frac{z^2+2z}{(z+1)^2} \, dz$ (sur $]-1; \rightarrow)$)

11) $\int \frac{4}{u^2-4u+4} \, du$ (sur $]2; \rightarrow)$)

12) $\int \frac{e^{2x}-3e^x+1}{e^x} \, dx$

13) $\int \frac{x-3}{1+x^2} \, dx$

14) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$ (sur $]-2; 2[$).

242. Calcule les primitives suivantes *par parties* :

1) $\int x\cos x\,dx$

2) $\int x\sqrt{1+2x}\,dx$ (sur $[-\frac{1}{2};\rightarrow)$)

3) $\int x^2\ln x\,dx$ (sur $\mathbb{R}_0^+$) 4) $\int x^2e^x\,dx$.

243. a) Si tu veux te perfectionner dans la technique d'*intégration par substitution*, reprends les exercices 239 et 240.

b) L'intégrale $\int x\sqrt{1+2x}\,dx$ a pu être calculée par parties à l'exercice précédent. Essaie de la calculer par substitution.

244. Voici des primitives à calculer par la méthode de ton choix :

1) $\int \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt{u}}\,du$ (sur $\mathbb{R}_0^+$)

2) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ (sur $]0;\rightarrow)$)

3) $\int \left(\frac{5}{7\sqrt{t}}+5^{2t-1}\right)dt$ (sur $\mathbb{R}_0^+$)

4) $\int \frac{6}{5-x}\,dx$ (sur $\leftarrow;5[$)

5) $\int \sin 4t\,dt$ 6) $\int (8x-1)\,.\,e^{4x^2-x+1}\,dx$

7) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx$

8) $\int \frac{\ln v}{v^2}\,dv$ (sur $\mathbb{R}_0^+$)

9) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ (sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$)

10) $\int \frac{e^\theta}{e^\theta+1}\,d\theta$ 13) $\int \frac{5u}{u^4+3}\,du$

11) $\int \frac{\text{Arc }\tan t}{1+t^2}\,dt$ 14) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

12) $\int x(2x+1)^8\,dx$ 15) $\int \text{Arc }\tan 2x\,dx$.

245. a) Utilise une méthode de ton choix pour calculer sur $\mathbb{R}_0^+$:

1) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ 2) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

3) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ 4) $\int \frac{\ln^n x}{x}\,dx$ $(n\in\mathbb{N}_0)$

5) $\int x\ln x\,dx$ 6) $\int x^2\ln x\,dx$

b) $f(x)=\ln x$ s'intègre-t-elle immédiatement grâce à une formule ? Si non, trouve un procédé pour calculer $\int \ln x\,dx$.

246. a) Calcule, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\int \tan x\,dx$, à l'aide d'une formule trigonométrique qui transforme $\tan x$.

b) A l'aide d'une démarche analogue, calcule, sur $]0;\pi[$, $\int \cot x\,dx$.

c) Utilise le résultat trouvé en b) pour calculer, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$, par parties.

247. **Vrai** ou **faux** ? Justifie ! Si l'énoncé est faux, corrige-le !

1) Sur $]-1;1[$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\text{Arc }\cos x + k$.

2) Puisque Arc $\sin x$ et $-$ Arc $\cos x$ sont des primitives de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1;1[$, pour tout x compris entre -1 et 1,

$$\text{Arc }\sin x = -\text{Arc }\cos x.$$

3) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$.

4) Sur $\mathbb{R}_0$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k$.

4.2

248. a) Dessine les parties du plan délimitées par l'axe x et

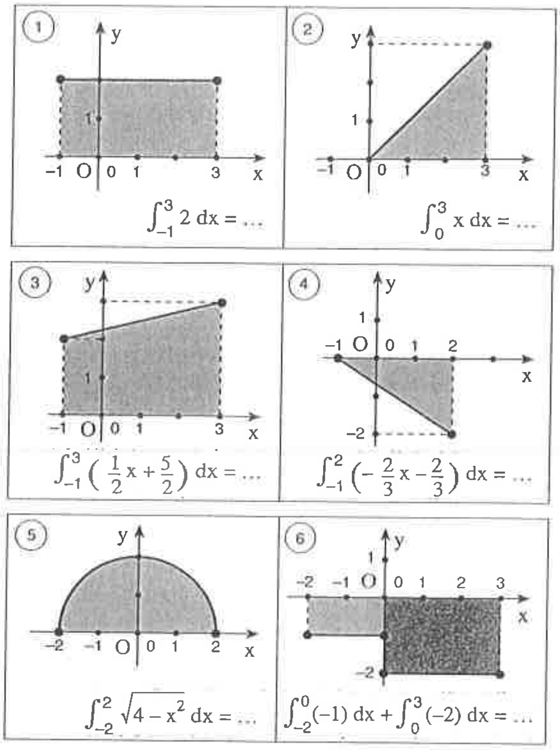
	le graphique d'équation	les droites d'équations respectives
1)	$y=3x-1$	$x=1, x=3$
2)	$y=x^2-1$	$x=2, x=4$
3)	$y=\frac{1}{2}x^3$	$x=0, x=2$
4)	$y=\sin x$	$x=0, x=\pi$
5)	$y=\text{Arc }\tan x$	$x=-1, x=\sqrt{3}$.

b) Encadre l'aire de chacune des parties que tu viens de dessiner à l'aide d'une *somme inférieure* et d'une *somme supérieure* de Darboux pour $n=4$ ou $n=8$.

c) Formule pour chacune des quatre situations du a) l'aire de la partie dessinée en langage de *limite de sommes* suivant Riemann et d'*intégrale définie*.

249. a) A l'aide de formules donnant l'aire de figures usuelles, calcule l'aire des parties coloriées du plan;

b) déduis-en, chaque fois, la valeur de l'intégrale définie proposée :



250. Vrai ou **faux** ? Justifie !

Si l'énoncé est faux, corrige-le !

1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2 - 4x)\,dx = \int_{1}^{-2} (4x - x^2)\,dx.$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 4x)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 4x)\,dx = \int_{1}^{-1} (x^2 - 4x)\,dx.$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 - 4x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe d'équation $y = x^2 - 4x$, l'axe x, l'axe y et la droite d'équation $x = -1$. (Réalise un dessin pour t'aider à répondre).

4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 4x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe d'équation $y = x^2 - 4x$, l'axe x et les droites d'équation respective $x = -1$ et $x = 1$.

251. Écris à l'aide d'une seule intégrale définie :

1) $\displaystyle\int_{-3}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx;$

2) $\displaystyle\int_{-0,5}^{2} f(u)\,du + \int_{-2}^{-0,5} f(u)\,du;$

3) $\displaystyle\int_{-2}^{1} g(x)\,dx - \int_{3}^{1} g(x)\,dx.$

252. a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, dessine le demi-cercle d'équation $y = \sqrt{9 - x^2}$.

b) Calcule l'aire du demi-disque A bordé par $\mathbb{C}$ (avec $\pi = 3,1415$).

c) Encadre l'aire du quart de disque précédent à l'aide des sommes de Darboux, à 10^{-4} près par défaut pour $n = 3$.

Déduis-en chaque fois un encadrement de l'aire du demi-disque.

d) Fais de même pour $n = 6$.

e) Si le nombre de subdivisions de $[-3;3]$ augmente au-delà de toute limite et si la longueur des sous-intervalles tend vers 0, vers quel nombre (à 10^{-3} près, par défaut) tend chacune des sommes de Darboux.

f) Calcule par la *méthode des trapèzes* (avec $n = 6$ et $n = 12$) : $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx.$

Profite au mieux de la symétrie que tu peux observer dans le dessin réalisé en a) pour rendre ton calcul plus court.

g) Compare les résultats trouvés en b) et en f). La réponse trouvée en f) est-elle une valeur approchée de celle trouvée en b) ? Avec quelle précision ?

h) Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$ par la méthode de substitution. Compare le résultat que tu viens de trouver avec les réponses du b), du e) et du f).

253. Vrai ou **faux**. Justifie ! Si l'énoncé est faux, corrige-le !

1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx = 1,5$ (U.A.)

2) L'intégrale indéfinie d'une fonction est l'ensemble des primitives de cette fonction.

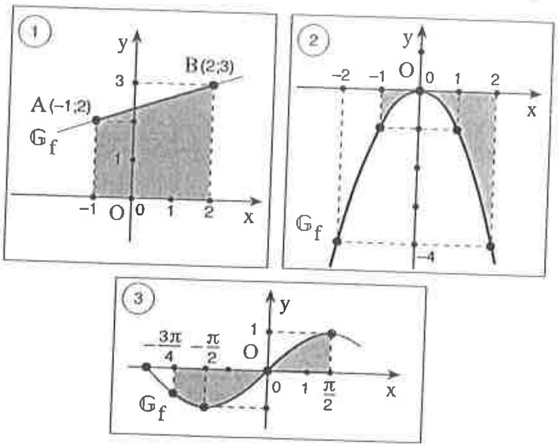
3) $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x\,dx = 1 + k.$

4) Toute intégrale définie représente une aire.

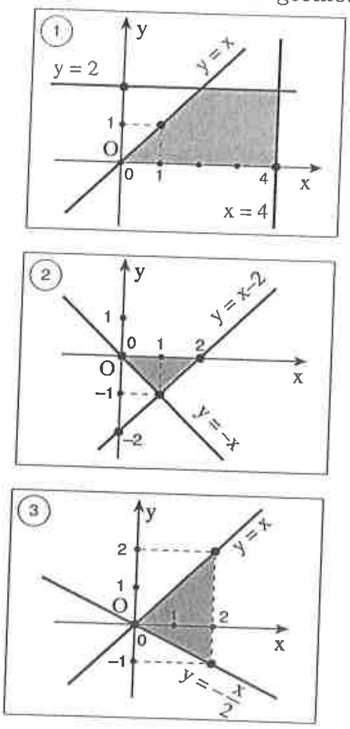
5) Toute intégrale définie aux bornes a et b d'une fonction intégrable sur $[a; b]$ est un réel.

261. Établis une équation de la droite ou de la courbe $\mathbb{G}_f$ dessinée.

Calcule ensuite *l'aire de la surface sous la courbe* à l'aide d'intégrale(s).



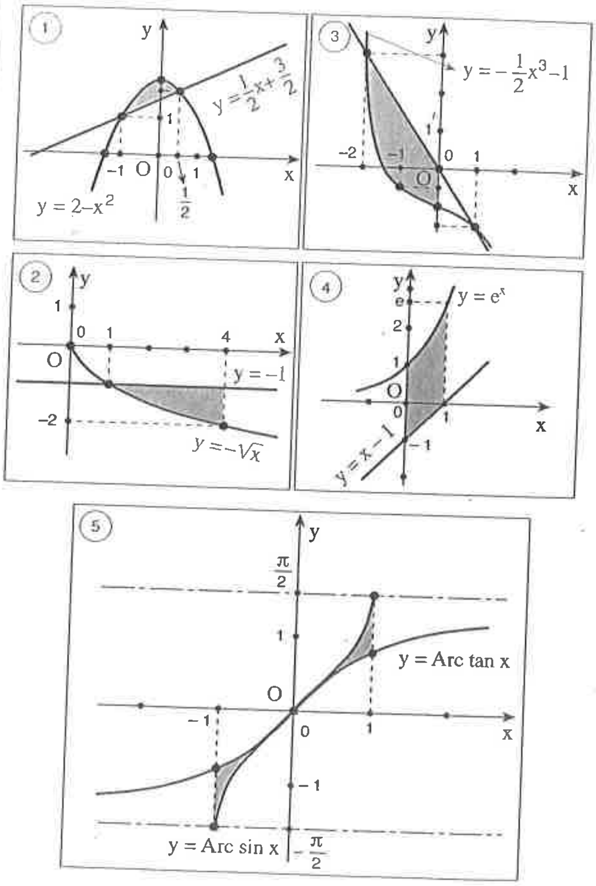
262. Calcule l'aire de la partie coloriée, à l'aide d'intégrales et confirme ensuite la réponse obtenue en calculant l'aire par des formules géométriques.



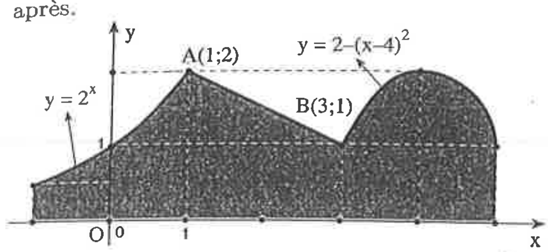
263. Esquisse le graphique des fonctions f données. Calcule l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe x, le graphique $\mathbb{G}_f$, les droites d'équation x = a et x = b, lorsque

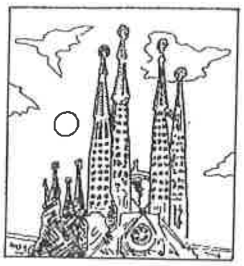
	f(x) =	a =	b =
1)	$2x+1$	-1	3
2)	$\sqrt{2x}$	0	1
3)	x^2-4x	-1	2
4)	$\sin x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
5)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	1	4
6)	x^3-2x^2	-1	1
7)	$\frac{1}{1-x}$	2	3
8)	$\frac{1}{(1-x)^2}$	2	3
9)	e^x	$\ln 2$	$\ln 3$
10)	$\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$	-1	1

264. Trouve une intégrale définie dont la valeur égale l'aire de la partie coloriée du plan; calcule ensuite cette aire.



265. A Barcelone, l'architecte Gaudi avait voulu naguère construire une façade dont la forme est donnée par la partie coloriée dans le dessin ci-après.





89

Si tu avais été son assistant, comment aurais-tu procédé pour calculer l'aire de cette façade ?

266. Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe d'équation $y = x^2 + 5$ et la droite d'équation $y = 4x + 5$.

267. Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par ~~l'axe x~~, la courbe $y = \sin x$, la courbe $y = \cos x$, sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

268. a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, dessine la courbe $\mathbb{G}$ d'équation

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + 3.$$

b) Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathbb{G}$, l'axe x, les droites d'équation $x = -3$ et $x = 4$.

269. Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x^2 - 4x$ et $2y = 4x - x^2$.

270. Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation $y^2 = 4x$ et $x^2 = 4y$.

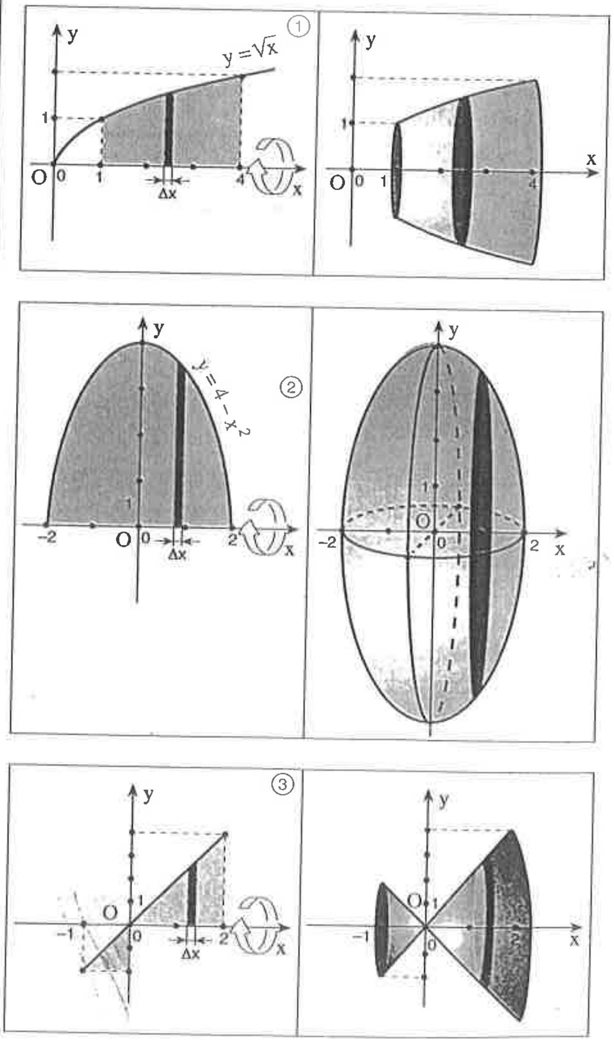
271. Calcule l'aire de la partie du plan comprenant l'origine du plan, délimitée par le cercle de centre O (0; 0) et de rayon 3 et la droite comprenant les points $A(0; -3)$ et $B(2; \sqrt{5})$.

272. Calcule l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe x, la courbe d'équation $xy - 2y - 1 = 0$, les droites d'équation $x = -e$ et $x = \frac{1}{e}$.

4.5

273. Imagine la rotation autour de l'axe x des figures coloriées ci-après.

Cette rotation engendre, dans chaque cas, le solide de révolution correspondant .



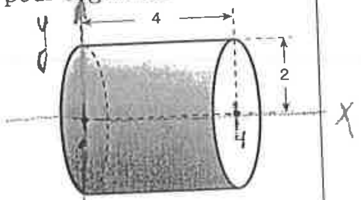
Calcule le volume de chacun de ces solides.

274. Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe x de la surface délimitée par le graphique de la fonction f, l'axe x et les droites d'équation x = a et x = b, lorsque

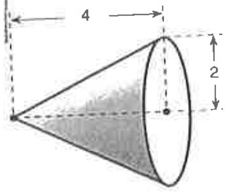
f(x) =	a =	b =
1) $2x+3$	0	2
2) $-x^2+1$	-2	1
3) $\sqrt{x}+2$	1	2
4) e^x	-1	1
5) $\dfrac{2}{x}$	-2	-1
6) $\dfrac{1}{\cos x}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$

275. a) Quelle surface faudrait-il faire tourner autour d'un axe bien choisi pour engendrer

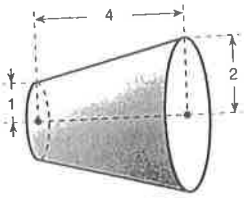
1) un cylindre de hauteur 4 cm et de rayon 2 cm ?



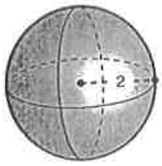
2) un cône de hauteur 4 cm et de rayon 2 cm ?



3) un tronc de cône de hauteur 4 cm et de rayons 1 et 2 cm ?



4) une sphère de rayon 2 cm ?



b) Dessine chacune de ces surfaces dans un repère orthonormé du plan, en indiquant l'axe de rotation.

c) Par calcul intégral, détermine le volume de chacun de ces solides.

POUR S'AUTOCONTRÔLER

4.1

276. Soit $F(x) = \dfrac{3}{2}\ln^2 x$. Vérifie que F(x) est une primitive sur $\mathbb{R}_0^+$ de $f(x) = \dfrac{3\ln x}{x}$.

277. Calcule la primitive, sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$, de $f(x) = \sin x + \dfrac{5}{\cos^2 x}$ si cette primitive prend la valeur 2, pour $x = \pi$.

278. Calcule les primitives suivantes sur $\mathbb{R}$, sauf mention contraire :

1) $\displaystyle\int 9u^2\,du$

2) $\displaystyle\int \cos x\,.\,e^{\sin x}\,dx$

3) $\displaystyle\int \sin t\cos^3 t\,dt$

4) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$

5) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+3}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

8) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ (sur $\mathbb{R}_0^+$)

9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln v}}{v}\,dv$ (sur $[1;\rightarrow)$)

10) $\displaystyle\int x\,\mathrm{Arc\,tan}\,x\,dx$.

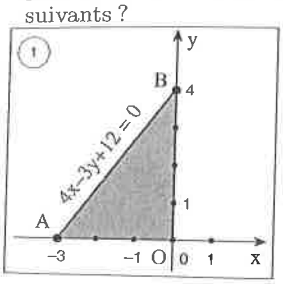
4.2

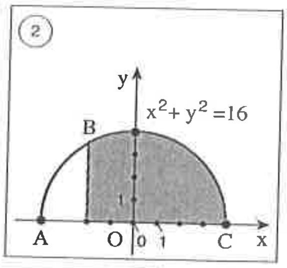
279. a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, dessine la droite d'équation $y = -x + 2$ et porte les points $A(-2;4)$ et $B(2,0)$.

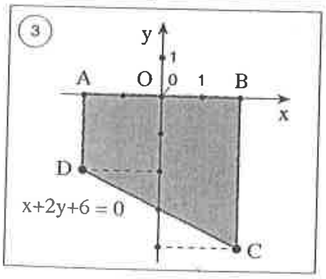
b) Soit C, le point de coordonnée $(-2,0)$. Par une formule géométrique, calcule l'aire du triangle ACB.

c) Calcule $\int_{-2}^{2}(-x+2)\,dx$.

280. Quelle intégrale définie est égale à l'aire $\mathbb{S}$ de la partie coloriée du plan, dans chacun des dessins suivants ?







4.3

281. Calcule :

1) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{t-2}{t^2-4t+3}\,dt$

2) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{t-2}{(t^2-4t+3)^2}\,dt$

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\tan t(1+\tan^2 t)\,dt.$

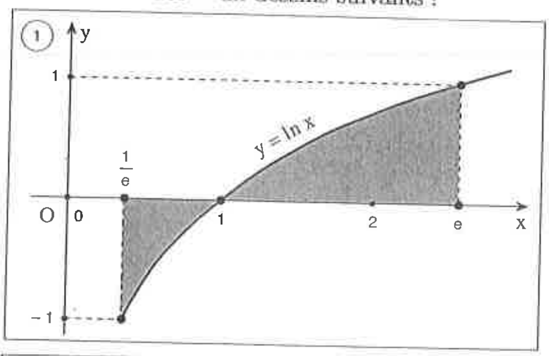
4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

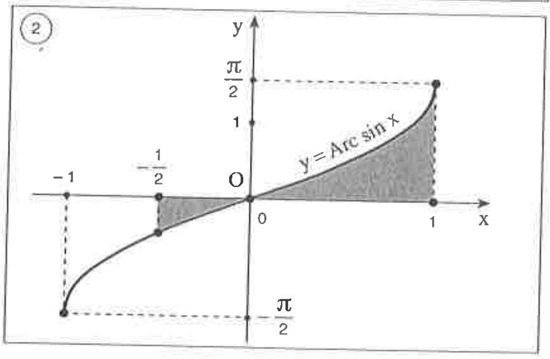
5) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{(1+x^2)\text{Arc}\tan x}\,dx$

6) $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{7}{2}}}^{\sqrt{7}}\frac{x}{\sqrt{49-x^4}}\,dx.$

4.4

282. Quelle somme ou différence d'intégrales définies est égale à l'aire $\mathbb{S}$ de la partie coloriée du plan, dans chacun des deux dessins suivants ?

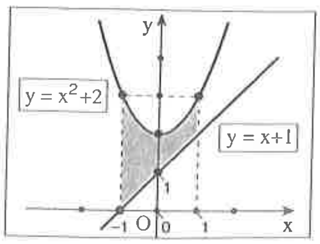




283. Calcule l'aire de la partie comprise entre l'axe x, le graphique $\mathbb{G}_f$, les droites d'équation respective $x = a$ et $x = b$, lorsque

	$f(x) =$	$a =$	$b =$
1)	$2-x$	-1	1
2)	$1-\frac{x^2}{4}$	-4	-2
3)	$\cos 2x$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

284. Calcule l'aire A de la partie hachurée :



285. Calcule l'aire A de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x^2 - 4x + 3$ et $y = 3\sqrt{x} - 3$.

4.5

286. a) Dessine $\mathbb{G}_f$, le graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2\sqrt{x}.$$

Colorie la surface comprise entre $\mathbb{G}_f$, l'axe x, l'axe y et la droite d'équation $x = 4$.

Dessine dans cette surface un tronçon vertical rectangulaire d'épaisseur $\Delta x = x_{k+1} - x_k$.

b) En tournant autour de l'axe x, quel solide engendre-t-il ? Quelles sont ses dimensions ?

c) Esquisse le dessin du solide engendré par la révolution de la surface coloriée, autour de l'axe x.

d) Calcule, à l'aide d'une intégrale, le volume V du solide engendré.

287. a) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe x, l'hyperbole $\mathbb{H}$ d'équation $xy = 4$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.

b) Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe x de la partie du plan décrite en a).

SOLUTIONS DES EXERCICES POUR S'AUTOCONTRÔLER

276. $\left(\frac{3}{2}\ln^2 x\right)' = \frac{3\ln x}{x}.$

277. $\int\left(\sin x + \frac{5}{\cos^2 x}\right)dx = -\cos x + 5\tan x + k.$ Or $-\cos\pi + 5\tan\pi + k = 2.$ Donc $k = 1.$

La primitive demandée est $F(x) = -\cos x + 5\tan x + 1.$

278.

1) $3u^3 + k$

2) $e^{\sin x} + k$

3) $-\int -\sin t\cos^3 t\,dt = -\frac{\cos^4 t}{4} + k$

4) $\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-3}\,dx = -\frac{1}{8(x^2+1)^4} + k$

5) $\frac{1}{2}\int 2(x-1)(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2x+3)^3} + k$

6) $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{Arc }\tan x^2 + k$

7) $\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + k$

8) $f'(x) = x.$ D'où $f(x) = \frac{x^2}{2}.$ $g(x) = \ln x.$ D'où $g'(x) = \frac{1}{x}.$

D'où, les primitives sur $\mathbb{R}_0^+$ de $f(x) = x\ln x$ sont $\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k.$

9) $\int(\ln v)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{v}\,dv = \frac{2\sqrt{\ln^3 v}}{3} + k.$

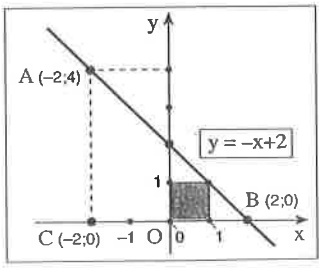
10) $f'(x) = x.$ D'où $f(x) = \frac{x^2}{2}.$ $g(x) = \text{Arc }\tan x.$ D'où $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$

D'où les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x\,\text{Arc }\tan x$ sont $\frac{x^2}{2}\text{Arc }\tan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$$= \frac{x^2}{2}\text{Arc }\tan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{Arc }\tan x - \frac{1}{2}(x - \text{Arc }\tan x) + k.$$

279. a)



b) $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$ (U.A.).

c) $\int_{-2}^{2}(-x+2)\,dx = 8.$

280. ① $4x - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + 4$ $\qquad \mathbb{S} = \int_{-3}^{0}\left(\frac{4}{3}x + 4\right) dx$ (U.A.)

② $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 16 \\ y \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$ $\qquad \mathbb{S} = \int_{-2}^{4}\sqrt{16 - x^2}\, dx$ (U.A.)

③ $x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 3$ $\qquad \mathbb{S} = \int_{-2}^{2}(-\frac{1}{2} - 3)\, dx$ (U.A.)

281. 1) $\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{2(t-2)}{t^2 - 4t + 3} dt = \frac{1}{2}\Big[\ln|t^2 - 4t + 3|\Big]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 15) = \ln\sqrt{\frac{8}{15}}.$

2) $\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 2(t-2)(t^2 - 4t + 3)^{-2}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{t^2 - 4t + 3}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{8} - \frac{-1}{15}\right) = \frac{-7}{240}.$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\tan t(1 + \tan^2 t)\, dt = \left[\frac{\tan^2 t}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

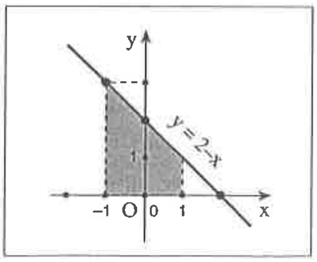
4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \Big[-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = (-1 + \sqrt{3}) + \left(-\sqrt{2} - (-2)\right) = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$

5) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1 + x^2)\text{Arc }\tan x} = \Big[\ln\big|\text{Arc }\tan x\big|\Big]_{1}^{\sqrt{3}} = \ln\frac{\pi}{3} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln\frac{4}{3}.$

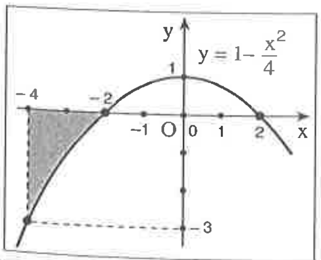
6) $\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{2}\int_{\sqrt{\frac{7}{2}}}^{\sqrt{7}}\frac{\frac{2}{7}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{7}\right)^2}} dx = \frac{1}{2}\left[\text{Arc }\sin\frac{x^2}{7}\right]_{\sqrt{\frac{7}{2}}}^{\sqrt{7}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.$

282. ① $\mathbb{S} = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\, dx + \int_{1}^{e}\ln x\, dx$ (U.A.) $\qquad$ ② $\mathbb{S} = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\text{Arc }\sin x\, dx + \int_{0}^{1}\text{Arc }\sin x\, dx$ (U.A.)

283. 1) $A = \int_{-1}^{1}(2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(-2 - \frac{1}{2}\right) = 4$ (U.A.)



2)

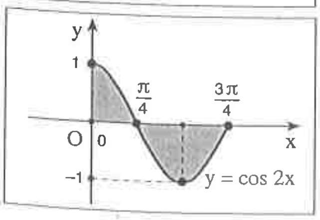


$A = -\int_{-4}^{-2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx$

$= -\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-4}^{-2}$

$= -\left(-2 + \frac{2}{3}\right) + \left(-4 + \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3}$ (U.A.)

3)



$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(\Big[\sin 2x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \Big[\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\Big((1 - 0) - (-1 - 1)\Big) = \frac{3}{2}$ (U.A.)

Variante rapide : En examinant la partie hâchurée, on s'aperçoit que l'aire est égale, pour des raisons de symétrie, au triple de l'aire sous la courbe sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. $\qquad A = 3\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\, dx = \frac{3}{2}\Big[\sin 2x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}$ (U.A.)