> « L'esprit divin s'est manifesté de façon sublime dans cette merveille de l'analyse, ce prodige d'un monde idéal, cet intermédiaire entre l'être et le non-être que nous appelons la *racine imaginaire de l'unité négative* ».
>
> Gottfried Leibniz *(1646-1716)*

POUR APPLIQUER

1.1 et 1.2

1. Trouve les réels x et y tels que :
   1) $(2x-1)+(1-y)i = 5-3i$
   2) $(3x+2y)-(4x+y)i = 2-i$
   3) $3xi - 2y = 3x + 2 - 4yi - 2i$
   4) $xi - y - x + 3i = 0$.

2. Calcule et donne la réponse sous la forme a + bi :
   1) $(3-5i)+(-2+2i)-(-2+3i)$
   2) $\frac{4-3i}{2} - \frac{2}{3}(1-i) - \frac{2-i}{6}$
   3) $(3+2i)(4-3i)$
   4) $\left(-\sqrt{3}-\frac{i}{2}\right)\left(-\sqrt{3}+\frac{i}{2}\right)$
   5) $\left(\sqrt{2}+3i\right)^2$
   6) $\left(-2+i\sqrt{3}\right)^2$
   7) $\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}+i\right)\left(\frac{2}{3}-i\right)$
   8) $\left(\sqrt{2}-3i\right)^3 - \left(\sqrt{2}+i\right)^3$.

3. Calcule le quotient des complexes z et z′ et écris-le sous la forme a + bi :
   1) $z = 3+4i$ et $z' = -2i$
   2) $z = 3$ et $z' = 2+i$
   3) $z = 4+i$ et $z' = 4-2i$
   4) $z = i\sqrt{5}$ et $z' = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

4. Calcule l'inverse des complexes suivants :
   1) i ; 2) $-3i$; 3) $2 - i\sqrt{2}$.

5. Calcule et donne la réponse sous la forme a + bi :
   1) $\left(\frac{1+i}{2+i}\right)^2 : \frac{2i}{3+i}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}+i} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i}\right)^2$.

6. Extrais les racines carrées des complexes suivants; elles seront écrites sous la forme a + bi :
   1) -5
   2) $-2i$
   3) $3 + 2i$
   4) $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

7. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes dont les solutions seront écrites sous la forme a + bi :
   1) $4z + 25\bar{z} = 2 - 3i$
   2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$
   3) $4 + t^2 = 0$
   4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$
   5) $w^2 - 5iw - 6 = 0$
   6) $(i+1)x^2 + 4 = 4x$
   7) $(x^2+3)(9+x^2) = 0$
   8) $t^4 + 6t^2 + 25 = 0$
   9) $v^2 + \left(\sqrt{2}-2\right)iv + 2\sqrt{2} = 0$
   10) $3u^4 - 4u^3 + 4u - 3 = 0$.

8. Construis dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont :
   1) $(3-2i)+(1-3i)$
   2) $2(5-4i) - \frac{1}{2}(3+4i)$
   3) $(\sqrt{2}-i)^2$
   4) $(\sqrt{3}-i)^3$
   5) $z - z'$ si $z = 1+i$ et $z' = 1-i$
   6) $2z + 3z'$ si $z = 1+i$ et $z' = 1-i$.

9. Vrai ou **faux** ?

Si l'énoncé est correct justifie-le, sinon corrige-le !

1) $-3+i$ est le complexe conjugué de $-3-i$.

2) Un complexe est nul ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

3) Si z est un nombre complexe, alors

a) z est un réel ssi $z=\overline{z}$;

b) $z+\overline{z}=2\mathcal{R}(z)$;

c) $z-\overline{z}=2\mathcal{I}(\overline{z})$;

d) le module de z égale 1 ssi $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

4) Si a et b sont des réels, alors $\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}i$.

5) Le carré du module de tout complexe est égal au produit de ce complexe par son conjugué.

6) Les racines carrées de -4 sont $2i$ et $-2i$.

7) L'inverse de i est $-i$.

8) Deux nombres complexes sont conjugués ssi leur somme et leur produit sont des réels.

9) $7+5i>2-3i$.

1.3

10. Écris les complexes suivants sous forme trigonométrique :

1) -12 3) $1+i\sqrt{3}$ 5) $\sqrt{3}-3i$

2) $-i$ 4) $-3-i\sqrt{3}$ 6) $-16+16i$.

11. Écris les complexes suivants sous leur forme algébrique $a+bi$:

1) $\cos 45°+i\sin 45°$

2) $2(\cos 120°+i\sin 120°)$

3) $3(\cos 210°+i\sin 210°)$

4) $-3\operatorname{cis} 300°$.

12. Soit le nombre complexe $z=\sqrt{3}-i$.

Calcule le module et l'argument de z, de $3i-z$, de $3i+3z$.

13. Calcule et écris sous la forme algébrique :

1) $\operatorname{cis}45°\,.\,\operatorname{cis}30°$ 4) $\dfrac{12\operatorname{cis}60°}{4\operatorname{cis}15°}$

2) $\left(2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}\right)^2\left(3\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4}\right)^3$ 5) $\dfrac{(2-2i)^5}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4}$

3) $(-3-3i)^7$ 6) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5(2-2i)^6$.

1.4

14. Soit le complexe $z=\sqrt{3}-i$.

a) Calcule les racines carrées du complexe z écrit sous forme trigonométrique.

b) Vérifie le résultat trouvé en a) par une méthode algébrique.

15. Calcule les racines :

1) cubiques de i;

2) quatrièmes de -16;

3) cinquièmes de $-\sqrt{3}+i$;

4) sixièmes de $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Dans chaque cas, porte, dans le plan gaussien, les points dont les chiffres sont les racines trouvées.

16. Résous dans $\mathbb{C}$ et porte dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les solutions trouvées :

1) $z^6=-1-i$ 3) $y^3-2-i=0$

2) $x^4+81=0$ 4) $t^4+t^2+1=0$.

1.5

17. À quelle transformation du plan de Gauss correspond

1) l'addition de i à tout complexe z ?

2) la multiplication par i de tout complexe z ?

18. Quelle est l'affixe du point P′ du plan de Gauss, d'origine O image du point P d'affixe $-1-i$

1) par la translation de vecteur d'affixe i ?

2) par l'homothétie h de centre O et de rapport -2 ?

3) par la rotation r de centre O et d'angle $-90°$?

4) par la similitude $h\circ r$?

19. Dans le plan de Gauss, représente le point P d'affixe $z=1+i$ et le point Q d'affixe $t=1-i$.

Construis géométriquement le point S d'affixe :

1) $z+t$

2) $4z-5t$

3) zt

4) $(z+t)(-2t+1)$

5) $(2z-t)^2$

Décris chaque fois les transformations du plan utilisées.

POUR S'AUTOCONTRÔLER

1.1 et 1.2

20. Quels sont les réels a et b tels que les nombres complexes $2a - 1 + 2bi$ et $2b - (2 - 3a)i$ soient égaux ?

21. Calcule et donne la réponse sous la forme $a + bi$:

1) $\left(\sqrt{5} - 3i\right)\left(2 - i\sqrt{5}\right)$

2) $\left(-\sqrt{3} - i\sqrt{2}\right)^2$

3) $\left(2 + \frac{i}{2}\right)^3$

4) $\left(\sqrt{2} - 3i\right)^2\left(-7 + 6i\sqrt{2}\right)$

5) $(3 - i) : (2 + i)$

6) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}$.

22. Calcule les racines carrées de $1 + 2i$ et écris-les sous la forme $a + bi$.

23. Résous dans $\mathbb{C}$ (les racines seront écrites sous forme $a + bi$) :

1) $u - 3 = 4\overline{u} + 8i$.

2) $t^2 + 4 = 0$. Factorise ensuite $t^2 + 4$.

3) $2x^2 + ix + 3 = 0$. Factorise ensuite $2x^2 + ix + 3$.

24. Trouve une condition nécessaire et suffisante pour que le produit ou le quotient des nombres complexes $x + yi$ et $x' + y'i$ soit un réel.

25. Porte dans le plan gaussien les points dont les affixes sont données :

A	$(4 + 3i) - (3 + 4i)$
B	$\left(-\sqrt{2} + i\right)\left(-\sqrt{2} - i\right)$
C	$(z - z')^2$, avec $z = 2 - i$ et $z' = -\frac{1}{2}i$.

1.3

26. Écris $1 - i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} - 3i$ et $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ sous forme trigonométrique.

Calcule z et écris-le sous la forme algébrique :

$$z = \frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4\left(-\sqrt{3} - 3i\right)^6}{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^8}.$$

1.4

27. Calcule les racines cinquièmes de $32i$ et porte, dans le plan de Gauss, les points dont les affixes sont les racines trouvées.

28. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et écris-les sous la forme algébrique :

1) $x^4 + 8\sqrt{2} = 8i\sqrt{2}$ 2) $z^6 - z^3 + 1 = 0$.

1.5

29. a) Quel est l'affixe du point P' du plan de Gauss d'origine O, image du point P d'affixe $2 - 2i$ par

1) la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $1 - i$ suivie de la rotation d'origine O et d'angle 135° ?

2) la rotation d'origine O et d'angle −90° suivie de l'homothétie de centre O et de rapport −3 ?

b) Nomme chacune des composées des deux transformations proposées.

30. Dans le plan de Gauss, représente le point P d'affixe $z = -2 + i$ et le point Q d'affixe $t = 2i$.

Construis géométriquement le point S d'affixe :

1) $z - t$ 2) $-\dfrac{3z}{2}$ 3) zt.

Calcule, dans chaque cas, l'affixe du point S.

Décris, chaque fois, les transformations du plan utilisées.

SOLUTIONS DES EXERCICES POUR S'AUTOCONTRÔLER

20. $2a - 1 + 2bi = 2b - (2 - 3a)i$

$\Updownarrow$ (égalité de deux nombres complexes)

$$\begin{cases} 2a - 1 = 2b \\ 2b = -(2 - 3a) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Les deux nombres complexes sont alors égaux à $1 + i$.

21. 1) $-\sqrt{5} - 11i$ 3) $\dfrac{13}{2} + \dfrac{47}{8}i$ 5) $1 - i$

2) $1 + 2i\sqrt{6}$ 4) 121 6) $\dfrac{6\sqrt{2}}{5} + \dfrac{4\sqrt{3}}{5}i.$

22. $(x + yi)^2 = 1 + 2i$

$\Updownarrow$ (égalité de deux nombres complexes)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 2 \quad \text{(x et y sont de même signe)} \end{cases}$$

$\Updownarrow$ $\left((x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 5\right)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{5} \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases} \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = -\sqrt{5} \text{ (à écarter)}$$

Les racines carrées de $1 + 2i$ sont

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

23. 1) $a + bi - 3 = 4(a - bi) + 8i$

$\Updownarrow$ (égalité de deux nombres complexes)

$$\begin{cases} a - 3 = 4a \\ b = -4b + 8 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{8}{5}. \end{cases} \qquad S = \left\{-1 + \frac{8}{5}i\right\}.$$

2) $\rho = -16.$ $S = \{-2i, 2i\}.$

$t^2 + 4 = (t + 2i)(t - 2i).$

3) $\rho = -25.$ $S = \left\{-\dfrac{3i}{2}; i\right\}.$

$2x^2 + ix + 3 = (2t + 3i)(t - i).$

24. • $(x + yi)(x' + y'i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xx' - yy' + (xy' + x'y)i \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underline{xy' + x'y = 0}$

• $\dfrac{x + yi}{x' + y'i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{(x + yi)(x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \dfrac{(x'y - xy')}{x'^2 + y'^2}i \in \mathbb{R}$

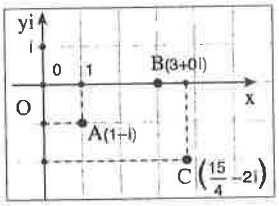
$\Leftrightarrow \dfrac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2} = 0$ et $(x', y') \neq (0, 0)$

$\Leftrightarrow \underline{x'y - xy' = 0 \text{ et } (x', y') \neq (0, 0).}$

25. $A(1 - i)$

$B(3 + 0i)$

$C\left(\dfrac{15}{4} - 2i\right)$



26. $1 - i\sqrt{3} = 2\,\text{cis}\,(-60^\circ)$

$-\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\,\text{cis}\,240^\circ$

$-\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\,\text{cis}\,135^\circ.$

$$z = \frac{16\,\text{cis}\,(-240^\circ) \,.\, 1728\,\text{cis}\,1440^\circ}{256\,\text{cis}\,1080^\circ}$$

$= 108\,\text{cis}\,120^\circ$

$= 108\left(-0,5 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -54 + 54i\sqrt{3}.$

27. $32i = 32\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{2}.$

Les racines cinquièmes de $32\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{2}$ sont données par

$$2\,\text{cis}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)$$

c'est-à-dire

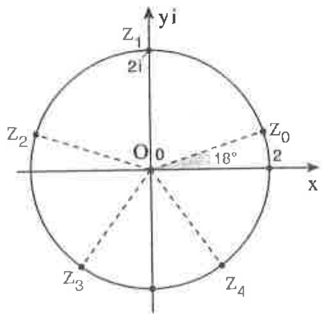
$z_0 = 2\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{10},$

$z_1 = 2\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{2},$

$z_2 = 2\,\text{cis}\,\dfrac{9\pi}{10},$

$z_3 = 2\,\text{cis}\,\dfrac{13\pi}{10},$

$z_4 = 2\,\text{cis}\,\dfrac{17\pi}{10}.$



28. 1) Les solutions sont les racines quatrièmes de

$$-8\sqrt{2}+8i\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad 16\,\text{cis}\,135^\circ$$

c'est-à-dire les complexes $2\,\text{cis}\,\dfrac{135^\circ+k360^\circ}{4}$,

$z_0 = 2\,\text{cis}\,33,75^\circ$ ou $1,663+1,111\,i$

$z_1 = 2\,\text{cis}\,123,75^\circ$ ou $-1,663+1,111\,i$

$z_2 = 2\,\text{cis}\,213,75^\circ$ ou $-1,663-1,111\,i$

$z_3 = 2\,\text{cis}\,303,75^\circ$ ou $1,663-1,111\,i$

2) $\begin{cases} z^3 = u \\ u^2 - u + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} z^3 = u \\ u = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad u = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- Les racines cubiques de

$$\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

sont les complexes $\text{cis}\,\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

$z_0 = \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{9}\right) = 0,94-0,34\,i$

$z_1 = \text{cis}\,\dfrac{5\pi}{9} = -0,17+0,98\,i$

$z_2 = \text{cis}\,\dfrac{11\pi}{9} = -0,77-0,64\,i.$

- Les racines cubiques de

$$\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \text{cis}\,\frac{\pi}{3}$$

sont les complexes $\text{cis}\,\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

$z'_0 = \text{cis}\,\dfrac{\pi}{9} = 0,94+0,34\,i$

$z'_1 = \text{cis}\,\dfrac{7\pi}{9} = -0,77+0,64\,i$

$z'_2 = \text{cis}\,\dfrac{13\pi}{9} = -0,17-0,98\,i.$

29. a) 1) P $(2-2i)$ ou $2\sqrt{2}\,\text{cis}(-45^\circ)$

$\downarrow$ $\boxed{\text{translation de vecteur } \vec{u}\ (1-i)}$

Q $(2-2i+1-i)$ ou $(3-3i)$

ou $\left(3\sqrt{2}\,\text{cis}(-45^\circ)\right)$

$\downarrow$ $\boxed{\text{rotation d'origine O et d'angle } 135^\circ}$

P′ $(3\sqrt{2}\,\text{cis}(-45^\circ) \,.\, \text{cis}\,135^\circ)$

ou $(3\sqrt{2}\,\text{cis}\,90^\circ)$ ou $\boxed{3\sqrt{2}\,i}$.

2) P $(2-2i)$ ou $2\sqrt{2}\,\text{cis}(-45^\circ)$

$\downarrow$ $\boxed{\text{rotation d'origine O et d'angle } -90^\circ}$

Q $\left(2\sqrt{2}\,\text{cis}(-45^\circ) \,.\, \text{cis}(-90^\circ)\right)$

ou $\left(2\sqrt{2}\,\text{cis}(-135^\circ)\right)$ ou $l(-2-2i)$

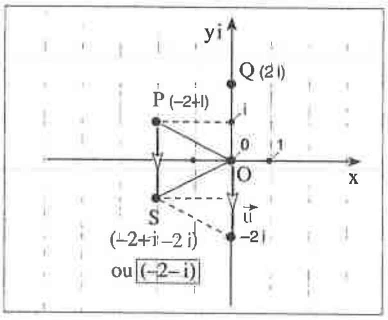
$\downarrow$ $\boxed{\text{homothétie de centre 0 et de rapport } -3}$

P′ $((-3)(-2-2i))$ ou $\boxed{(6+6i)}$.

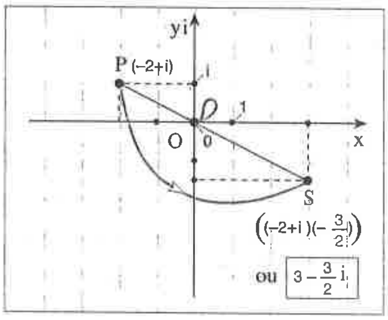
b) 1) La composée est une isométrie du plan.

2) La composée est une similitude du plan de rapport 6 dont le seul point fixe est O.

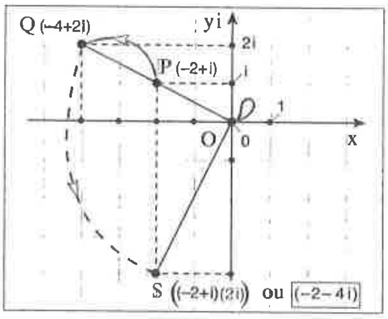
30. 1) S est l'image de P par la translation de vecteur $\vec{u}\ (-2i)$.



2) S est l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$.



3) S est l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport 2 suivie de la rotation de centre O et d'angle 90° c'est-à-dire par la similitude de rapport 2 dont le seul point fixe est le point O.



43. Dans le champ $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne :

$$w = (z + 2i)(\bar{z} + 4) \text{ avec } z = x + yi, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) $\mathbb{A}$ est l'ensemble des nombres z tels que w soit réel ; $\mathbb{B}$ est l'ensemble des nombres z tels que w soit imaginaire pur.

Représente $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ dans le plan de Gauss.

b) Détermine le nombre k pour que l'équation

$$(z + 2i)(\bar{z} + 4) = k$$

admette comme solution $2 - 3i$.

Calcule l'autre solution de cette équation.

44. Soit $z = a + bi$ et $x = \dfrac{z^2}{1 - z}$.

Calcule x en fonction de a et de b.

Si P est le point-image de z, quel est l'ensemble des points du plan pour lesquels z est un réel ?

45. Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 7$.

Sachant que i et $-i$ sont solutions de l'équation $P(x) = 0$, calcule les autres racines de cette équation. Factorise ensuite $P(x)$.

1.3

46. Si $z = r \operatorname{cis} \varphi$,

quels sont le module et l'argument de $\bar{z}$?

47. Soit $z = a + bi$.

Détermine en fonction de a et de b le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{z - 4}{z + 1}$.

48. Considère les nombres complexes :

$$z_1 = 1 - i \quad ; \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_3 = \frac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$$

1) Calcule le module et l'argument de z_1, z_2, z_3.

2) Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de z_3.

3) Déduis de 1) et de 2) les valeurs de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

1.4

49. Montre que, dans le champ des complexes, les racines cubiques de 1 forment un *groupe commutatif* pour la multiplication.

50. Calcule les racines cubiques du nombre complexe

$$z = \frac{(2 - 2i)^4}{(-\sqrt{3} - i)^6(-2i)^8}$$

et écris-les sous leur forme algébrique.

1.5

51. L'énoncé suivant t'est familier dans le plan cartésien. Traite-le dans le plan de Gauss.

Dans le plan cartésien rapporté à un repère orthonormé, quelle est l'image du point P de coordonnée $(2; -2)$ par

1) la translation de vecteur $\vec{u}\,(-1; 1)$?

2) l'homothétie h de centre O et de rapport 3 ?

3) la rotation r de entre O et d'angle 210° ?

4) la composée des trois transformations précédentes ?

Indication : on peut écrire dans le plan de Gauss l'affixe du point P donné ; on opérera sur cet affixe avec des complexes correspondant aux transformations proposées.

52. Quelle est la *translation* t de vecteur $\vec{u}\,(z)$ qui appliquées trois fois consécutivement à P d'affixe $2 + i$ donne P′ d'affixe $1 + 2i$ comme image ?

53. Pose-toi la même question qu'à l'exercice 52 pour

a) une *homothétie* h de centre O et de rapport k.

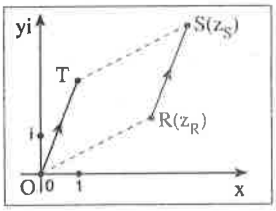
b) une *rotation* r de centre O et d'angle α.

54. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES COMPLEXES

a) 1) Si z_R et z_S sont les affixes respectives des points R et S du plan de Gauss, démontre alors que

– l'*affixe* de $\overrightarrow{RS}$ est $z_S - z_R$;

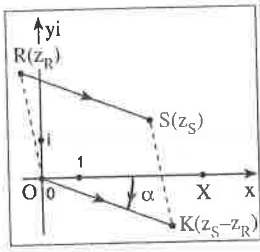
– la *norme* de $\overrightarrow{RS}$, notée $\|\overrightarrow{RS}\|$ ou $\overline{RS}$, est le module de $z_S - z_R$.

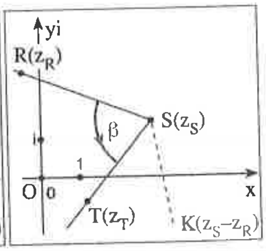


2) Calcule la distance des points A et B si l'on te dit que l'affixe de A est $\dfrac{1}{2} - 2i$ et celle de B est $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}i$.

b) 1) Soit, dans le plan gaussien, trois points deux à deux distincts donnés par leur affixe : $R(Z_R)$, $S(Z_S)$, $T(Z_T)$. Démontre que

- l'*argument* de $z_S - z_R$, affixe de $\overrightarrow{RS}$ est l'angle orienté α ou $\widehat{\overline{OX}, \overline{OK}}$, tel que $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{RS}$;
- l'angle orienté β ou $\widehat{\overline{SR}, \overline{ST}}$ est l'argument de $\dfrac{z_T - z_S}{z_R - z_S}$.





2) Calcule une amplitude de l'angle orienté $\widehat{\overline{CA}, \overline{CB}}$ lorsque, dans le plan gaussien, on donne $A(2 - i)$, $B(5 + 3i)$ et $C(-2 + i)$.

3) Comment vérifierais-tu que les droites MP et MN sont perpendiculaires lorsqu'on te donne z_M, z_N, z_P les affixes respectives des points M,N,P ?

4) Dans le plan de Gauss, on donne $A(-2 + i)$, $B(-2 - 2i)$ et $C\left(\dfrac{3\sqrt{3} - 4}{2}\right)$. Montre que A, B et C appartiennent à un même cercle et que le triangle ABC est équilatéral.

55. **APPLICATIONS MATRICIELLES DES COMPLEXES**

Soit $S^{2\times2}$, l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.

a) Démontre que $(S^{2\times2}, +, .)$ est un *champ*.

b) Démontre que l'application

$$f : S^{2\times2} \to \mathbb{C} : \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \to a + bi$$

est telle que, pour toute matrice $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et toute matrice $\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$,

on a $\left| \begin{array}{l} f(\mathcal{A} + \mathcal{A}') = f(\mathcal{A}) + f(\mathcal{A}'), \\ f(\mathcal{A}\mathcal{A}') = f(\mathcal{A}) \,.\, f(\mathcal{A}'). \end{array} \right.$

> Dans ce cas, on dit encore que f est un isomorphisme[(1)] du champ $(S^{2\times2}, +, .)$ sur le champ $(\mathbb{C}, +, .)$.
> Par f, on peut donc **associer** à la *matrice* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, le *nombre complexe* a + bi.

Quel nombre complexe associes-tu aux matrices

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

c) Calcule le produit matriciel $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit (x, y) et (x′, y′) les coordonnées de deux points du plan muni d'un repère.

> On dit que si
> $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
> alors (x′, y′) est l'image de (x, y) par la **transformation**
> $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to (x', y')$$
> à laquelle est **associée**, dans un repère donné, la **matrice** $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Décris la transformation du plan à laquelle est associée la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (a \neq 0), \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) A quels nombres complexes associes-tu les transformations décrites en c) ?

e) Démontre que tout nombre complexe a + bi peut être associé à une transformation du plan qui se décompose sous la forme : $h_a + r \circ h_b$.

où
- h_a est l'homothétie de centre O et de rapport a,
- h_b est l'homothétie de centre O et de rapport b,
- r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) Étymologie : *iso* ou égal, *morphein* ou structure.

ATHENEE ROYAL D'IXELLES **SERIE 1**
Classe 6èmeGénérale
Travaux dirigés de mathématique

Exercice 1

Soit z $\in C$ et M(x, y) l'image de z dans le plan complexe.

Soit Z $= 2 \mid \overline{z} \mid^2 + \overline{z} - \frac{i}{8}$

1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.
3) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire pur.
4) En déduire l'ensemble des points M tel que l'on ait : Arg Z = $-\frac{\pi}{2}$

Exercice 2

Résoudre dans C, l'équation (E) : $(1 - i)\ z^2 + (3i + 2)z + 4i + 1 = 0$

1) En déduire dans C les solutions de l'équation
(F) : $(1 + i)\ z^2 + (2 - 3i)\ z + 1 - 4i = 0$.

Exercice 3

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 + (9i - 4)z + 11i - 3 = 0$

1) Montrer que cette équation admet une racine réelle z_0
2) En déduire les autres solutions de (E).
3) En déduire enfin, dans C, les solutions de l'équation :
(F) : $z^2 - (1 - 2i)z - 11i - 3 = 0$.

Exercice 4

Soient $z_1 = 4\sqrt{2}(1 - i)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

1) Déterminer $\frac{z_1}{z_2}$ sous la forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2) En déduire les valeurs de cos $\frac{7\pi}{12}$ et de sin $\frac{7\pi}{12}$.
3) Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ soit réel ?

Exercice 5

1) a) Développer : $(\sqrt{3} + 1)^2$ et $(\sqrt{3} - 1)^2$
   b) Calculer : cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$.
2) Soit $z_1 = -\frac{1}{4}\ \alpha$ et $z_2 = (1 - i)\alpha^4$ avec $\alpha \in C$.
   a) Déterminer le module de l'argument de z_1 et de z_2 en fonction du module et de l'argument de α.
   b) Déterminer α pour que l'on ait : $z_1\overline{z_2} = -64i$
3) Soit $u_1 = (1 + i)\alpha$ et $u_2 = i\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2$ avec $\alpha \in C^*$.
   a) Déterminer le module et l'argument de u_1 et de u_2 en fonction du module et de l'argument de α.
   b) Déterminer α pour que l'on ait : $u_1\overline{u}_2 = -1$.
4) Soit $w_1 = (1 + i)\alpha^2$ et $w_2 = -4\alpha$ avec $\alpha \in C$.
   a) Déterminer le module et l'argument de w_1 et w_2 en fonction du module et de l'argument de α.
   b) Déterminer α pour que w_1 et w_2 soient conjugués (c-à-d $w_1 = \overline{w_2}$).

ATHENEE ROYAL D'IXELLES | Contrôle n°2 ($2^{ème}$*période*) | Cote........../20

Classe $6^{ème}$Générale(6h)
Date : 12/11/12

Les Nombres Complexes

Exercice1 ($12pts$)

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - i \quad ; \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \qquad z_3 = \frac{(z_1)^5}{(z_2)^4}$$

1) Calculer le module et l'argument de z_1, z_2, et z_3. ($3pts$)

2) Écrire $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous la forme algébrique et trigonométrique. ($2pts$)

3) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$. ($2pts$)

4) Calculer $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2012}$ ($2pts$)

5) Déterminer l'ensemble des valeurs de $n \in \mathbf{N}$ pour que $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ soit réel ? ($3pts$)

Exercice2 ($4pts$)

Calculer et écrire sous la forme algébrique le complexe Z

$$Z = \frac{(-2-2\sqrt{3}i)^5(\sqrt{3}+3i)^4}{(2-2i)^8}$$

Exercice3 ($4pts$)

Déterminer les racines $5^{ème}$ de $-4+4i$ et reporte leurs points images dans le plan de Gauss.

ATHENEE ROYAL D'IXELLES
Classe 6èmeGénérale(6h)
Date : 23/10/12

<u>Contrôle sur les nombres complexes (3)</u>

<u>Exercice1</u>

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 - (5-i)z^2 + 9z - 5 - i = 0$

1) Monter que l'équation (E) admet une racine réelle α qu'il faut déterminer. (3*pts*)

2) Factoriser le polynôme $Q(z) = z^3 - (5-i)z^2 + 9z - 5 - i$ (3*pts*)

et

3) En déduire les autres racines de l'équation (E) (2*pts*)

<u>Exercice2</u> (8*pts*)

Soit z un nombre complexe de point image M(x,y), et w un nombre complexe tel que

$$w = z + |z|^2 + 3\bar{z}$$

a) Écris w sous la forme algébrique, en déduire le Re(w) et Im(w) (2*pts*)

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que w est un réel. (2*pts*)

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que w est un imaginaire pur. (2*pts*)

d) Déterminer les nombres complexes z pour que $w = 2i$ (2*pts*)