4ème partie

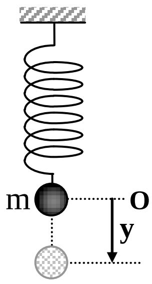
Mouvements vibratoires - Ondes.

Table des matières

Ch.1 Le mouvement rectiligne sinusoïdal.

1.Introduction.

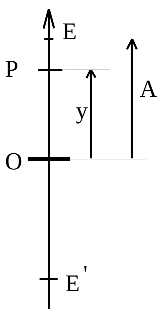
Le terme périodique qualifie tout mouvement ou événement qui se répète à intervalles réguliers.
Un mouvement est périodique si la position, la vitesse et l'accélération reprennent la même valeur après des durées égales appelées périodes.
Exemples de mouvements périodiques : battement cardiaque, mouvement de la terre autour du soleil, ...
Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique qui s'effectue de part et d'autre d'une position d'équilibre.



Exemple : considérons un objet solide suspendu à un ressort; sous l'action du poids de ce solide, le ressort s'allonge jusqu'à ce que la force de rappel exercée par le ressort soit compensée par le poids du solide.

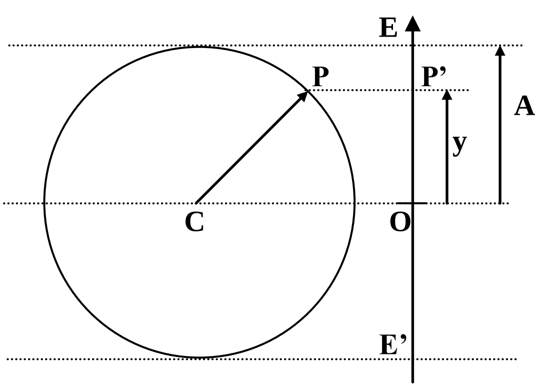
A l'équilibre, le solide est immobile à la position O.
Eloignons l'objet d'une distance **y** de sa position d'équilibre ; il est alors soumis à une force de rappel supplémentaire, proportionnelle à l'allongement y et qui a pour valeur **f = -k.y**
Si on le lâche, il se met à osciller; son mouvement est un mouvement vibratoire.

Eléments caractéristiques d'un mouvement vibratoire.



- Un sens positif est choisi sur la trajectoire
- L'origine des mesures est généralement la position d'équilibre 0
- L'élongation y est la valeur algébrique de la distance OP
- L'amplitude A est égale à l'élongation maximale
- On appelle **vibration ou oscillation le trajet parcouru par le mobile P pour repasser à la même position, dans le même sens.** (PEE'P; E et E' étant les positions extrêmes du mobile.)
- **La période T est la durée d'une vibration**

2.Le mouvement rectiligne sinusoïdal (M.R.S.).



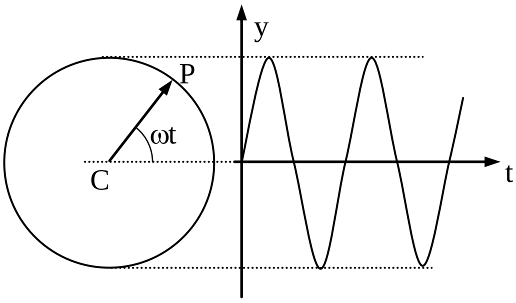
Considérons un point P en mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω et P', projection du point P sur un segment de droite parallèle à un diamètre du cercle parcouru par le point P.

L'élongation y du point P' est la projection du vecteur $\overrightarrow{CP}$, vecteur qui tourne à la vitesse angulaire constante ω (ω=2π/T); ce vecteur est appelé **vecteur tournant associé** au mouvement vibratoire du point P'.

Le point P' est animé d'un mouvement vibratoire, en raison même de la définition d'un tel mouvement ; ce mouvement qui s'effectue sur un segment de droite est appelé **mouvement rectiligne sinusoïdal**.

3. Elongation d'un point en M.R.S.

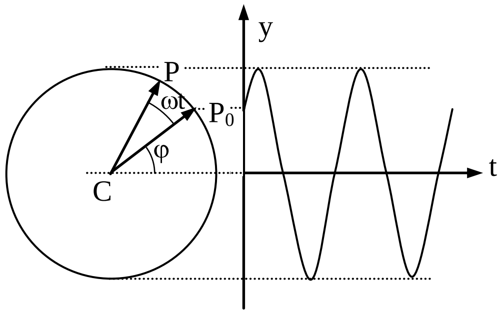
Si, en t=0, le point P coïncide avec la position d'équilibre O :



L'équation du mouvement de P' s'écrit :

y = CP sin ωt = **A sin ωt**

Si, en t=0, P ne coïncide pas avec la position d'équilibre O :



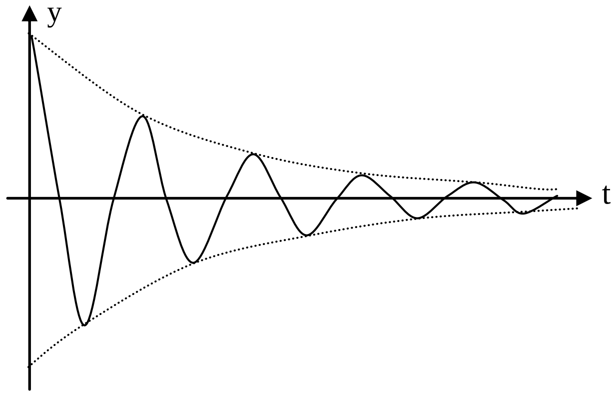
L'équation du mouvement de P' s'écrit :

y = CP sin (ωt+ϕ) = **A sin (ωt +φ)**

L'angle **φ** est la **phase à l'origine.**

4.Mouvement amorti - Mouvement entretenu.

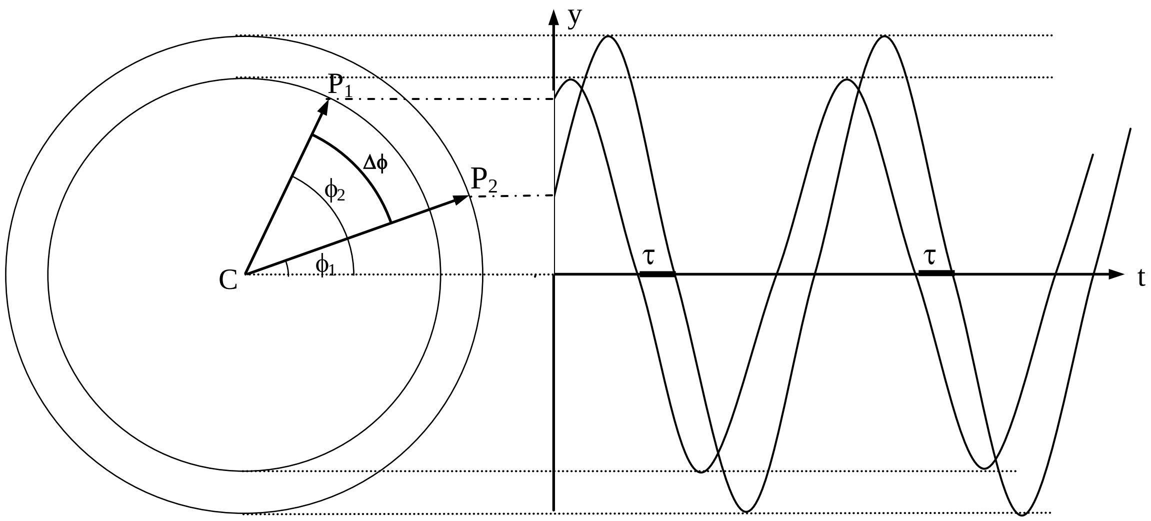
Dans la plupart des cas réels (i.e. masse suspendue à un ressort, balançoire, diapason, corde vibrante d'un instrument de musique, ...), l'amplitude de la vibration diminue au fil du temps en raison des frottements (principalement les frottements sur l'air ambiant); l'énergie cinétique de vibration E_k diminue et de la chaleur est dissipée dans le milieu extérieur.
On parle dans ce cas de ***mouvement vibratoire amorti.***
Si la force de frottement est inférieure à une valeur critique, l'amplitude diminue de manière exponentielle.



Bien qu'on ne puisse éliminer les frottements qui accompagnent le mouvement vibratoire d'un objet macroscopique, on peut souvent compenser ces frottements en apportant de l'énergie au système oscillant; c'est le rôle du ressort d'une montre, du poids d'une horloge à balancier, de la pile d'une montre à quartz ou à diapason, ...
On parle dans ce cas de ***mouvement vibratoire entretenu.***

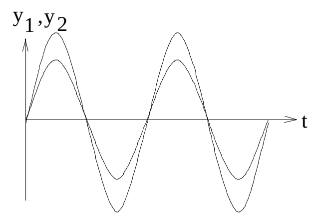
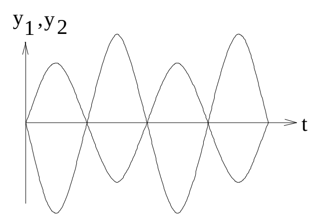
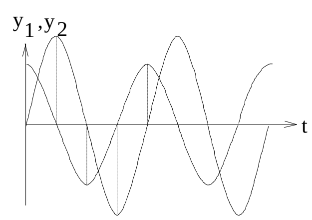
Dans d'autres cas, (suspension d'un véhicule automobile, par exemple), des frottements sont volontairement provoqués pour limiter la durée des oscillations ; c'est le rôle des **amortisseurs.**

5.Différence de phase entre deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation.



- **La différence de phase entre deux grandeurs sinusoïdales y_1 et y_2 est égale à l'angle $\Delta\phi$ formé par les vecteurs tournants associés à y_1 et y_2.**
- Si le vecteur tournant associé à y_1 suit celui qui est associé à y_2, on dit que y_1 est en retard de phase de $\Delta\phi$ sur y_2.
- A la différence de phase $\Delta\phi$ correspond un retard dans le temps égal à : $\tau = \dfrac{\Delta\phi}{\omega} = \dfrac{\Delta\phi . T}{2\pi}$

Cas particuliers.

$\Delta\phi$	Différence de phase	y_1 et y_2	
$2k\pi$	concordance de phase	-max. en même temps -min. en même temps -s'annulent en même temps	
$(2k+1)\pi$	opposition de phase	-s'annulent en même temps -y_1 est maximum quand y_2 est minimum et vice-versa.	
$(2k+1)\pi/2$	quadrature de phase	y_1 est extremum quand y_2 est nul et vice-versa.	

Exercice 1.1 Caractérisez les différences de phase suivantes : $\pi/2$, $5\pi/2$, 3π, 12π, $7\pi/2$, $\pi/4$, 16π, 6π, $12\pi/2$, $18\pi/4$, $3\pi/5$.

6.Vitesse et accélération d'un point mobile en M.R.S.

La vitesse est la dérivée première de la fonction position c'est-à-dire de l'élongation, :
$v = (y_t)' = A\ \omega \cos(\omega t+\phi) = A\ \omega \sin(\omega t+\phi+\pi/2)$
La vitesse est en avance de phase de $\pi/2$ sur l'élongation.

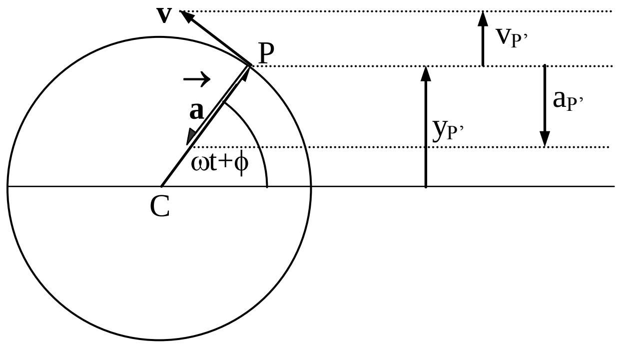
L'accélération est la dérivée seconde de l'élongation :
$a=(y_t)''=(v_t)'=- A\ \omega^2 \sin(\omega t +\phi)= A\ \omega^2 \sin(\omega t+\phi+\pi)$ (*)
L'accélération est en opposition de phase avec l'élongation.

Remarques importantes.

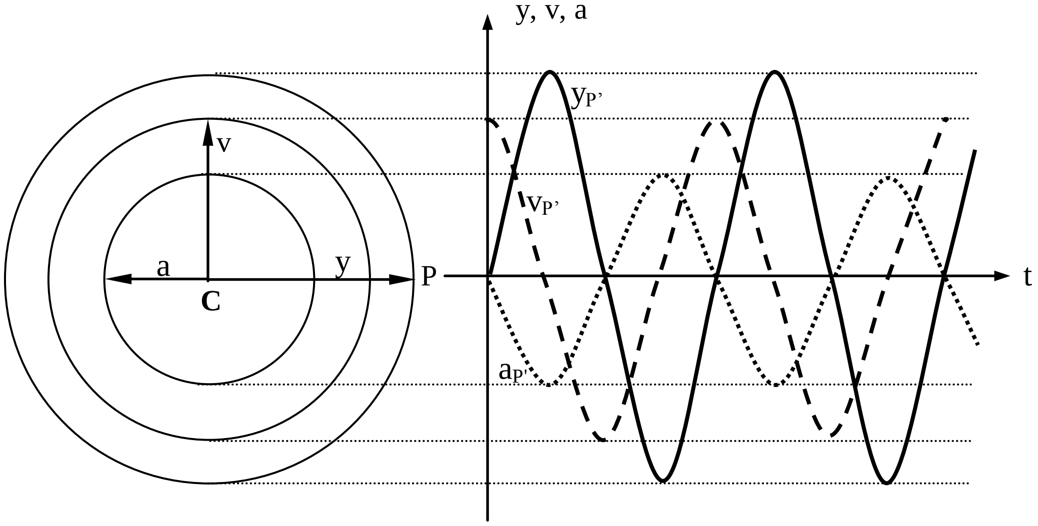
- La relation (*) ci-dessus montre que : $\mathbf{a = - \omega^2 y}$

En multipliant chaque membre de cette dernière égalité par m, on obtient : $ma = F = -m\omega^2 y$.
Cette expression montre que la force est proportionnelle à l'élongation si le mouvement est sinusoïdal. La réciproque s'énonce :"*Toute force proportionnelle à l'élongation produit un mouvement rectiligne sinusoïdal"*. Sa démonstration nécessite des outils mathématiques trop complexes et ne peut, de ce fait, être abordée ici.

- Sur le schéma suivant, on trouvera le vecteur tournant $\overrightarrow{CP}$ associé au mouvement de P' ainsi que les vecteurs vitesse et accélération du point P en M.C.U.; on remarquera que les projections de ces vecteurs sont égales aux expressions calculées ci-dessus et que les déphasages sont bien ceux déterminés par calcul.



- La figure ci-dessous montre les variations relatives de y, v et a au cours du temps.



7.Exercices.

$y = A \sin(\omega t + \phi)$

$v = A\, \omega \cos(\omega t + \phi)$

$a = - A\, \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

$a = - \omega^2 . y$

$\sin x \cong x$ si $x<0,25$ rad

1.2 Une particule en M.C.U. dans un plan horizontal a-t-elle :
a- une vitesse constante ?
b- une énergie cinétique constante ?
c- une quantité de mouvement constante ?
d- une accélération constante ?
e- une énergie mécanique constante ?

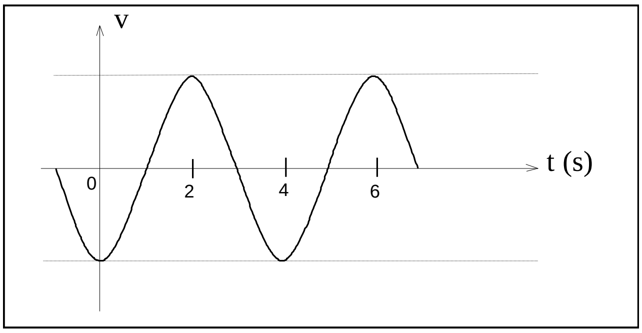
1.3 Mêmes questions pour une particule en M.R.S. dans un plan horizontal

1.4 Vrai ou faux ? Un mobile en mouvement rectiligne sinusoïdal :
a- subit une force qui varie sinusoïdalement au cours du temps;
b- voit son énergie cinétique osciller avec la même période que celle de son mouvement;
c- a une accélération maximale là où sa vitesse est extrémale;
d- a une vitesse nulle lorsque son énergie potentielle est maximale;
e- accélère parfois dans le sens opposé à celui du mouvement

1.5 Combien de temps faut-il pour qu'un point mobile en M.R.S. passe de y=0 à y=A ?
De y=0 (sens +) à y=0 (sens -) ? De y=0 (sens +) à y=-A ? De y=0 à y=A/2 (sens +) ?

1.6 Soient $y_1 = 4 \sin(10\pi t - \pi/6)$ et $y_2 = 6 \sin(10\pi t + \pi/3)$.
Comparez y_1 et y_2 au point de vue A, ν et ϕ; représentez les vecteurs tournants associés et dessinez les courbes y = f(t) pendant 2 périodes.

1.7 Le graphique ci-dessous représente la dépendance au temps de la vitesse d'une particule en mouvement rectiligne sinusoïdal.



Calculer la période et la fréquence du mouvement.
Tracer les graphiques y=f(t) et a=f(t) correspondants.

1.8 Que vaut l'élongation d'un mobile en MRS d'amplitude 12 cm et de fréquence 15 Hz, 0,02 s après le passage par l'origine ?

1.9 Calculez la fréquence d'un MRS d'amplitude 10 cm qui atteint pour la première fois l'élongation y=2 cm 0,001 s après le passage par l'origine.

1.10 L'élongation d'un MRS atteint 1/4 de sa valeur de crête 1/20 de seconde après le passage par l'origine. Que vaut la fréquence ?

1.11 Un point en MRS se trouve à 4,5 cm de l'origine 0,2 s après le passage par celle-ci.
Que vaut la fréquence si l'amplitude est de 6 cm ?

1.12 Combien de temps faut-il pour que l'élongation d'un MRS de fréquence 54 Hz et d'amplitude 8 cm s'accroisse de 3 à 7 cm ?

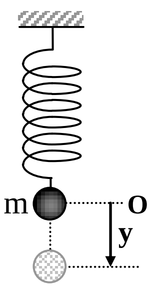
1.13 Une masse de 500 g suspendue à un ressort est animée d'un mouvement vibratoire sinusoïdal d'amplitude 10 cm et de période 0,5 s.
1° Calculez sa vitesse :
a) lorsqu'elle passe par la position d'équilibre prise comme origine des élongations (sens positif);
b) lorsqu'elle se trouve à l'une des extrémités de la trajectoire (y=A);
c) lorsqu'elle se trouve à 2 cm de l'origine en se mouvant dans le sens négatif.
2° Calculez l'accélération aux trois positions précédentes.
3° Calculez la force de rappel aux mêmes positions.
4° Calculez l'énergie cinétique maximale de cette masse et son énergie potentielle aux trois positions citées.

1.14 Un corps ponctuel est animé d'un mouvement vibratoire d'amplitude 5 cm et dont l'accélération est telle que a=-16y.
1° Calculez la période et la fréquence du mouvement.
2° Ecrire les expressions de l'élongation y et de la vitesse du point en fonction du temps. R : T=1,57 s

1.15 Une petite masse de 100 g est animée d'un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal autour d'un point fixe O. Quand la masse se trouve à 1 cm de O, la force de rappel a une intensité de $36\ 10^{-3}$ N. Déterminez la période du mouvement ainsi produit. On prendra comme point origine le point O et comme instant initial celui où le mobile est en O, animé d'une vitesse de 30 cm/s dans le sens adopté comme positif sur la trajectoire.
Ecrivez les équations générales donnant la position du mobile, sa vitesse, son accélération et la force de rappel. Déterminez :
1° l'instant où le mobile passe pour la première fois au point d'abscisse -3 cm, en se mouvant dans le sens négatif;
2° l'énergie cinétique et l'énergie potentielle que possède le mobile à cet instant.
R : 1,047 s ; y=0,05 sin 6t ; v=0,3 cos 6t ; a=-1,8 sin 6t ; f=-0,18 sin 6t ; t=0,63 s ; $E_c=288\ 10^{-5}$ J ; $E_p=162\ 10^{-5}$ J

8.Applications : mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel.

A.Mouvement d'une masse suspendue à un ressort. (Oscillateur harmonique simple)



- L'étude statique du système montre que la force de rappel est proportionnelle à l'allongement : $f = -k.y$
où k est la *constante de rappel du ressort* (en N/m) et y, l'allongement du ressort.
Sachant que f=m.a, la relation précédente s'écrit :

$$a = \frac{f}{m} = \frac{-k}{m}y \qquad (1)$$

Or, (cf. page 4), une force proportionnelle à l'élongation produit un M.R.S.; on peut donc écrire : $a = -\omega^2.y$ (2)

En comparant les relations (1) et (2), on obtient :

$$\frac{k}{m}y = \omega^2 y = \frac{m.4\pi^2}{T^2}.y \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- La période d'oscillation est proportionnelle à $\sqrt{m}$ et inversement proportionnelle à $\sqrt{k}$.

Chaque oscillateur (ressort + masse) possède une ***période propre*** et donc, une ***fréquence propre.***

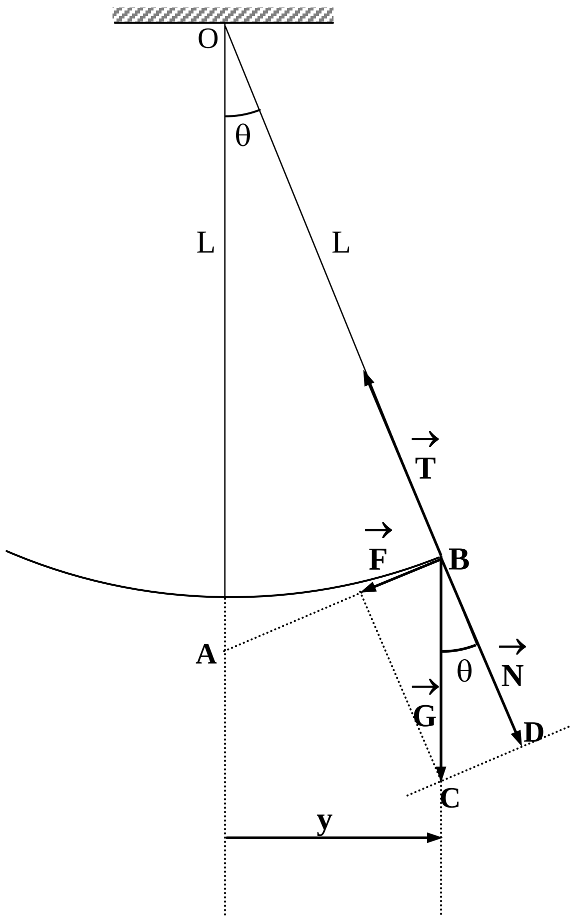
B. Le pendule simple.

Le pendule simple est un système idéalisé composé d'une masse ponctuelle suspendue à un point fixe O par un fil sans masse.

- L'étude expérimentale montre que le mouvement est périodique si l'angle θ est petit (θ<4°) : on parle d'***isochronisme des petites oscillations.***

- L'étude statique d'un tel système montre que la force résultante agissant sur la masse est la composante du poids tangentielle à la trajectoire; c'est une force de rappel proportionnelle à l'élongation.

(La composante du poids normale à la trajectoire est compensée par la tension T du fil).



En effet, dans le triangle BCD :

$$F=G.\sin\vartheta=mg.\sin\vartheta$$

Dans le triangle OAB : $AB=L.tg\vartheta \approx y$

Dans l'hypothèse où ϑ est petit : $\sin\vartheta \cong tg\vartheta \cong \theta$

Sous cette hypothèse, la trajectoire de la masse se confond avec un segment de droite horizontal.

Alors : $F = -mg.y/L$

(Signe - car F et y sont opposés)

- Sachant que F = m.a, on a:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{g}{L}.y \qquad (1)$$

Puisque la force est proportionnelle à l'élongation, le mouvement est un M.R.S. et on peut écrire : $a = -\omega^2.y$ (2)

- En comparant les relations (1) et (2), on obtient :

$$\omega^2.y=g.y/L \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T^2}.y = g.\frac{y}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Le pendule simple possède donc une période propre; dans les conditions précisées ci-dessus, il permet de mesurer g avec précision par mesure de L et T.

Exercices.

1.16 Comment varient l'énergie totale d'un pendule, sa période et la vitesse de la masse à la position d'équilibre si on double sa masse sans changer sa longueur ?

1.17 Représenter le vecteur accélération d'un pendule simple en différents points de sa trajectoire.

9.Aspects énergétiques.

Lorsqu'un corps de masse m est animé d'un mouvement vibratoire, il possède à tout instant une **énergie cinétique de vibration** :

$$E_k = ½\ m\ v^2 = ½\ m\ A^2\ \omega^2 \cos^2(\omega t+\varphi)$$

L'énergie cinétique de l'objet est nulle aux extrémités de la trajectoire; elle est maximale à la position d'équilibre:

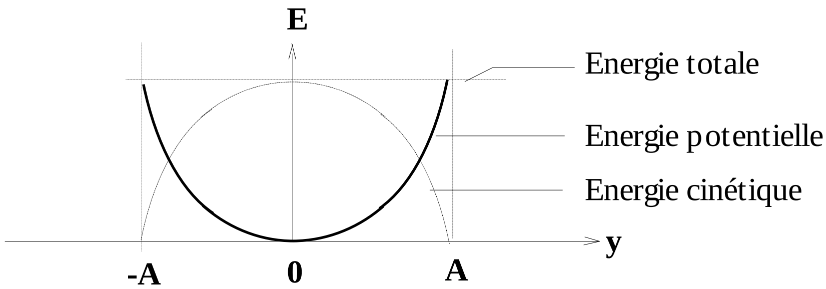
$$E_{k\ max} = ½\ m\ A^2\ \omega^2$$

S'il n'y a pas de frottement, l'énergie totale de l'oscillateur reste constante au fil du temps; pendant l'oscillation, l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle de déformation et réciproquement.

A tout instant : $E_k = ½\ m\ A^2\ \omega^2 \cos^2(\omega t+\varphi)$
et :

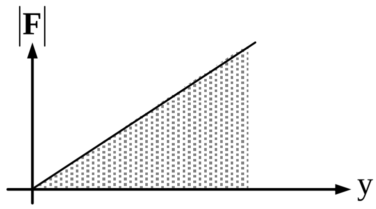
$$E_p = E_{k\ max} - E_k = ½\ m\ A^2\ \omega^2 - ½\ m\ A^2\ \omega^2 \cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$= ½\ m\ A^2\ \omega^2 \sin^2(\omega t+\varphi) = ½\ m\ \omega^2\ y^2 = ½\ k\ y^2$$



Remarque.

L'objet en vibration est soumis à une force de rappel F=-k.y , force proportionnelle à l'élongation :



Une force extérieure, opposée à la force de rappel, est nécessaire pour déformer le ressort avant toute oscillation; le travail de cette force extérieure est stocké sous forme d'énergie potentielle de déformation du ressort $E_p = ½\ k\ y^2$; remarquons que la mesure de ce travail est égale à la mesure de l'aire sous la courbe dans le graphique F=f(y)